Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное

образовательное учреждение

«Академия управления городской средой, градостроительства и печати»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебно-методической работе
О.В.Фомичева
«26» декабря 2025 г.

Методические рекомендации по организации и проведению практических занятий

ОП.01 «ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

специальности 09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта

Форма обучения -очная

Санкт-Петербург
2025

Разработчик: Ипатова С.В./Оболенская Е.Г., методисты СПб ГБПОУ АУГСГиП

Одобрены на заседании цикловой комиссии

Общетехнических дисциплин и компьютерных технологий

Протокол № 4

От 09.12.2025 г.

Председатель цикловой комиссии:

Шурухина И.Е.

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются умения и знания

формируемые ПК, ОК, ЛР	Умения	Знания
ОК 05 ПК 1.2 ЛР1-4,10 ЛР 13-17	– Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений – Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости – Применять методы дифференциального и интегрального исчисления – Решать дифференциальные уравнения – Пользоваться понятиями теории комплексных чисел	– Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии – Основы дифференциального и интегрального исчисления – Основы теории комплексных чисел

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на Государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ПК 1.2 Разрабатывать программные модули в соответствии с техническим заданием.

Практические работы

тема	название ПР	часы
Тема 1.1. Пределы и непрерывность функций	**Практические занятия.** Вычисление пределов функций в точке и на бесконечности.	2
	Практические занятия. Определение типов разрывов функций.	2
	Практические занятия. Анализ непрерывности функций на интервале.	2
Тема 1.2. Производная и её применение	**Практические занятия.** Вычисление производных для элементарных и составных функций.	2
	Практические занятия. Исследование функций с помощью производных (нахождение экстремумов и точек перегиба).	2
	Практические занятия. Применение частных производных в многомерных функциях.	2
Тема 1.3. Интегралы и их применение	**Практические занятия.** Вычисление неопределённых интегралов с использованием метода подстановки.	2
	Практические занятия. Применение метода интегрирования по частям для нахождения интегралов.	2
	Практические занятия. Вычисление определённых интегралов для расчёта площадей и объёмов.	2
	Практические занятия. Решение задач с применением интегралов для расчёта физических величин.	2
Тема 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений	**Практические занятия.** Операции с векторами: сложение, вычитание и умножение на скаляр.	2
	Практические занятия. Вычисление длины и угла	2

	между векторами.	
	Практические занятия. Применение скалярного и векторного произведений в задачах аналитической геометрии.	2
Тема 2.3. Сингулярное разложение матриц (SVD)	**Практические занятия.** Реализация сингулярного разложения матрицы с помощью вычислительных методов.	2
	Практические занятия. Применение SVD для анализа многомерных данных.	2
	Практические занятия. Уменьшение размерности данных с использованием SVD в задачах машинного обучения.	2
Тема 3.1. Линейные модели	**Практические занятия.** Построение линейной модели на основе экспериментальных данных.	2
	Практические занятия. Оценка параметров линейной регрессии с помощью метода наименьших квадратов.	2
	Практические занятия. Применение линейных моделей для предсказания значений.	2
Тема 3.2. Нелинейные модели	**Практические занятия.** Построение полиномиальной модели для аппроксимации данных.	2
	Практические занятия. Решение задач прогнозирования с помощью экспоненциальной и логарифмической нелинейных моделей.	2
	Практические занятия. Применение нелинейных моделей для анализа зависимостей и предсказания сложных процессов.	2
		44

Практическое занятие

Тема: Выполнение операций над матрицами.(СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ, УМНОЖЕНИЕ, ДЕЛЕНИЕ)

Цель: научиться выполнять операции над матрицами.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

или, сокращенно, $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m}$ (т.е. $i=1,2,3,\dots,m$) – номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т.е. $j=1,2,3,\dots,n$) – номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m\times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла, образуют *главную диагональ* матрицы.

Матрицы *равны между собой*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**. Квадратную матрицу размера $n\times n$ называют матрицей n -го порядка.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**. Обозначается буквой E.

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой O.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор-столбец, или вектор-строка, соответственно).

Замечание: каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие определенное число, называемое определителем (детерминантом) этой матрицы. Неквадратная матрица определителя не имеет.

Определители

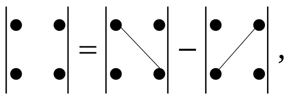
Определители 2-го порядка

Определитель (или иначе, детерминант) обозначается следующим образом: $D = \Delta = \det$.

Простейшие из определителей – это так называемые определители 2-го порядка.

Определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ Δ, a_{21}, a_{12} – побочную. Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



т.е. из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной.

Основные свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда равен нулю.

4. Если все элементы одного ряда Δ умножить на некоторое число k, то весь Δ умножится на это число.

Это свойство можно сформулировать иначе:

Общий множитель элементов какого-либо ряда Δ можно вынести за знак Δ.

5. Если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой Δ равен 0.

6. Если элементы какого-либо ряда Δ представляют собой суммы двух слагаемых, то Δ может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

7. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

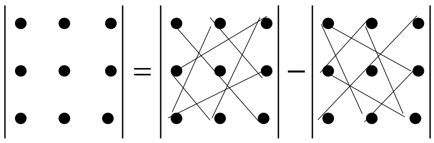
Определители 3-го порядка

Определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя, элементы a_{31}, a_{22}, a_{13} - побочную.

Для нахождения значения определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников, которое символически можно записать так:



Определитель 3-го порядка представляет собой алгебраическую сумму шести произведений, причем три произведения берутся со знаком „ + “ и три – со знаком „ – “. Со знаком „ + “ берется произведение элементов, стоящих на главной диагонали, а также произведения элементов, стоящих на параллели к главной диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла таблицы. Со знаком „ – “ берется произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, а также произведения элементов, стоящих на параллели к побочной диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла таблицы.

Можно пользоваться так называемым правилом Саррюса: приписать к определителю справа два первых столбца, не меняя их порядка, и составить сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, из которой затем вычесть сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов, параллельных ей:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Определители n-го порядка

Определителем *n*-го порядка называется число, равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

Заметим, что с ростом n резко увеличивается число членов определителя (n !), поэтому даже для $n = 4$ использование формулы весьма трудоемко (получим 24 слагаемых!).

На практике при вычислении определителей высоких порядков используют другие формулы. Для их рассмотрения необходимо ввести новые понятия.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)- го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $m_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

- **Алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается: A_{ij}.

$A_{23} = -m_{23}$, $A_{13} = m_{13}$.

Теорема: Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Задание к работе:

Вариант 1

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

1. Запишите элемент C_{24} матрицы C
2. Вычислите минор M_{44}
3. Вычислить алгебраическое дополнение C_{11}
4. Вычислить произведение элементов главной диагонали
5. Разложите определитель по 3-й строчке, не вычисляя полученные определители.
6. Разложите определитель по 2 –у столбцу, через алгебраические дополнения (не вычисляя).

Вариант 2

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{pmatrix};$$

1. Запишите элемент E_{14} матрицы E
2. Вычислите минор E_{23}
3. Вычислить алгебраическое дополнение E_{31}
4. Вычислить произведение элементов побочной диагонали
5. Разложите определитель по 2-й строчке, не вычисляя полученные определители.
6. Разложите определитель по 4 –у столбцу, через алгебраические дополнения (не вычисляя).

Вариант 3

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

1. Запишите элементD_{12} матрицы D
2. Вычислите минор D_{31}
3. Вычислить алгебраическое дополнение D_{23}
4. Вычислить произведение элементов побочной диагонали

5. Разложите определитель по 1-й строчке, не вычисляя полученные определители.

6. Разложите определитель по 3 –у столбцу, через алгебраические дополнения (не вычисляя).

Вариант 4

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

1. Запишите элемент F_{22} матрицы F
2. Вычислите минор F_{41}
3. Вычислить алгебраическое дополнение F_{14}
4. Вычислить произведение элементов главной диагонали

5. Разложите определитель по 4-й строчке, не вычисляя полученные определители.

6. Разложите определитель по 1 –у столбцу, через алгебраические дополнения (не вычисляя).

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Можно вычислить определитель с неравным числом столбцов и строк.
2. Чем отличается алгебраическое дополнение от минора.
3. Укажите способы вычисления определителей?

Практическое занятие

Тема: Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Цель: научиться решать системы линейных уравнений по формулам Крамера.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Определители впервые были введены для решения системы уравнений первой степени. В 1750г. швейцарский математик г. Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные через определители, составленные из коэффициентов системы.

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases} \qquad (1)$$

(коэффициенты $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ и свободные члены h_1, h_2, h_3 считаются заданными).

Тройка чисел x_0, y_0, z_0 называется *решением системы* (1), если в результате подстановки этих чисел вместо x, y, z все три уравнения (1) обращаются в тождество.

В дальнейшем основную роль будут играть следующие четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

Определитель Δ называется определителем системы (1). Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z получаются из определителя системы Δ заменой свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

Возможны три случая:

1) Если определитель Δ системы (1) отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то существует, и притом единственное, решение этой системы и оно выражается формулами $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ (формулы Крамера) (2)

2) Если определитель Δ системы (1) равен нулю ($\Delta = 0$) и хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решения (несовместна).

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система (1) либо совсем не имеет решений, либо если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много решений. В этом случае, одно из трех уравнений является следствием двух других. Система сводится к двум уравнениям с тремя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Задание к работе:

ВАРИАНТ 1.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}, b)\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 2.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 2x - y + 2z = -3 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3x + y - 3z = 3 \end{cases}, b)\begin{cases} 4x + y - 2z = 10 \\ -x + 3y + 5z = -1 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 3.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 4x - y - 5z = 1 \\ x + y - 2z = 6 \\ 3x - 2y - 6z = -2 \end{cases}, b)\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x - 6y - 4z = -3 \\ -4x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 4.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 3x - 2y + z = -3 \\ 5x + y - 2z = 11 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, b)\begin{cases} 3x + 2y + z = 14 \\ 2x + y + 4z = 12 \\ x + 3y + 2z = 11 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 5.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 2x - 3y + z = -3 \\ x + 5y - z = -1 \\ 3x + y + 4z = 11 \end{cases}, b)\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 6.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 5x + y - 2z = 5 \\ 10x + y + z = 0 \\ x - y + z = -11 \end{cases}, b)\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 3x + y - 6z = -7 \\ 9x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 7.

Решить системы:

$$a)\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}, b)\begin{cases} 5 - 2x = z - 3y \\ 1 - y = x - z \\ 2 - 3x = 1 - 5z \end{cases}$$

ВАРИАНТ 8.

Решить системы:

$$a)\begin{cases}\dfrac{5x-7y+2}{12}-\dfrac{8x+3z-4}{21}=\dfrac{11x-5z-4x+18}{14}\\ \dfrac{11x-5z+12}{14}-\dfrac{3y+7z-2x}{18}=\dfrac{8z-3x+32}{21}\\ 3x-y-2z=16\end{cases},\ b)\begin{cases}y+\dfrac{x}{2}=41\\ x+\dfrac{z}{4}=\dfrac{41}{2}\\ y+\dfrac{z}{5}=34\end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Любую систему уравнений можно решить правилом Крамара?
2. Как проверить правильность решения системы?

Практическое занятие

Тема: Система m линейных уравнений с n переменными. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: отработать навыки решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение: практическая работа, программное обеспечение.

Общие теоретические положения

Наиболее распространенным точным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \quad (1)$$

Будем производить над ней элементарные преобразования. Для этого выпишем матрицу из коэффициентов при неизвестных системы (1) с добавлением столбца свободных членов, другими словами **расширенную матрицу $\bar{A}$** для системы (1):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (2).$$

Предположим, что с помощью таких преобразований удалось привести матрицу $\bar{A}$ к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_{rr} & \cdots & b_{rn} & c_r \end{pmatrix} \quad (r \le n), \quad (3),$$

где все диагональные элементы b_{11}, b_{22},..., b_{rr} отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Матрице (3) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1r}x_r+\ldots+b_{1n}x_n=c_1, \\ \qquad b_{22}x_2+\ldots+b_{2r}x_r+\ldots+b_{2n}x_n=c_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r+\ldots+b_{rn}x_n=c_r, \end{cases} \quad (4),$$

которая получается из системы (1) с помощью некоторого числа элементарных преобразований и, следовательно, равносильна системе (1). Если в системе (4) $r=n$, то из последнего уравнения , имеющего вид $b_{nn}x_n=c_n$ (где $b_{nn}\neq 0$), находим единственное значение x_n, из предпоследнего уравнения – значение x_{n-1} (поскольку x_n уже известно) и т.д., наконец, из первого уравнения – значение x_1. Итак, в случае) $r=n$ система имеет единственное решение. Если же $r<n$, то система (4) легко приводится к системе вида:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{1,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n+\beta_1, \\ x_2=\alpha_{2,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n+\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\alpha_{r,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{rn}x_n+\beta_r. \end{cases} \quad r<n, (5),$$

которая и является по существу **общим решением** системы (1).

Неизвестные x_{r+1}, ..., x_n называются **свободными**. Из системы (5) можно будет найти значения x_1,..., x_r.

Приведение матрицы $\bar{A}$ к виду (3) возможно только в том случае, когда исходная система уравнений (1) совместна. Если же система (1) несовместна, то такое приведение невозможно. Это обстоятельство выражается в том, что в процессе преобразований матрицы $\bar{A}$ в ней появляется строка, в которой все элементы равны нулю, кроме последнего. Такая строка соответствует уравнению вида:

$$0*x_1+0*x_2+...+0*x_n=b,$$

которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных, так как $b\neq0$. В этом случае система несовместна.

В процессе приведения системы (1) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида 0=0. Их можно отбрасывать, так как это приводит к системе уравнений, эквивалентных прежней.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над её строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразований матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Решим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных с добавлением столбца свободных членов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix}$$

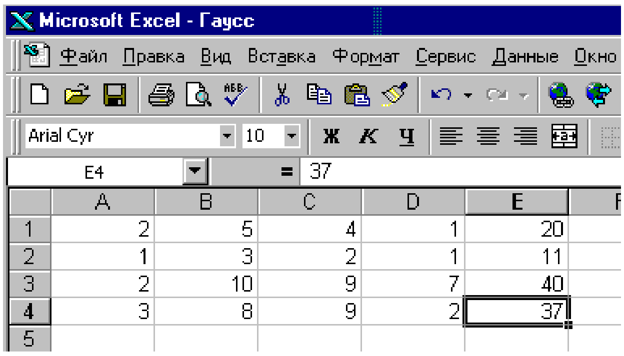
Произведём анализ строк расширенной матрицы:

– к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой, делённые на (-2);
– из 3-ей строки вычтем 1-ю строку;
– к 4-ой строке прибавим 1-ю, умноженную на (-3/2).

В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *табличный редактор*.

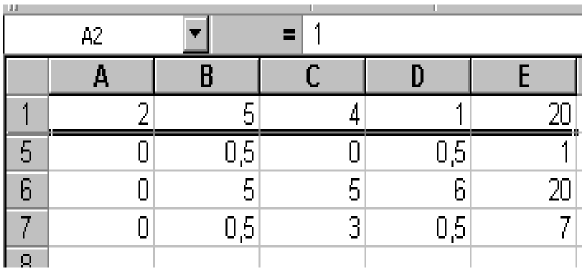
1. Включите компьютер.

2. Подождите пока загрузится операционная система *Windows*, после чего *откройте окно табличного редактора*.
3. *Заполните ячейки* таблицы значениями расширенной матрицы (рисунок 1)



	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
2	1	3	2	1	11
3	2	10	9	7	40
4	3	8	9	2	37
5					

Рисунок 1

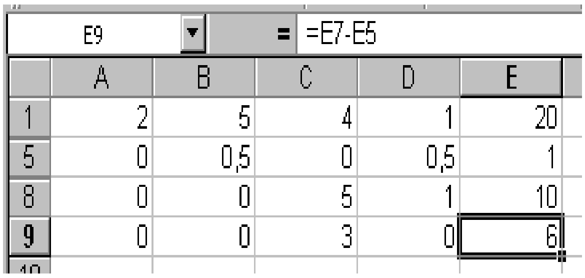


	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
6	0	5	5	6	20
7	0	0,5	3	0,5	7

Рисунок 2

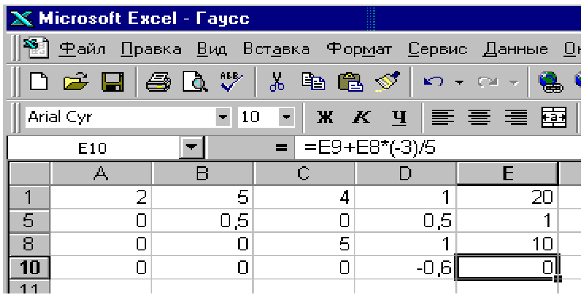
4. Для выполнения выбранного словесного алгоритма производим следующие действия.
   - *Активизируйте ячейку* A5 и с клавиатуры занесите в неё формулу вида =A2+A1/(-2), после чего *автозаполнением* занесите численные результаты в ячейки B5÷E5;
   - В ячейке A6 разместим результат вычитания 1-ой строки из 3-ей, и снова, пользуясь *автозаполнением*, заполним ячейки B6÷E6;
   - в ячейке A7 запишем формулу вида =A4+A1*(-3/2) и *автозаполнением* занесём численные результаты в ячейки B7÷E7.
   - Далее *скроем* 2, 3 и 4 – строки, которые нам уже не нужны. Для этого воспользуемся пунктом меню ФОРМАТ→СТРОКА→СКРЫТЬ. Результат показан на рисунок 2.
5. Снова произведём анализ строк получившихся в результате элементарных преобразований матрицы, чтобы привести её к треугольному виду.
   - К 6-ой строке прибавим 5-ю, умноженную на число (-10);
   - из 7-ой строки вычтем 5-ю.

   Записанный алгоритм реализуем в ячейках A8, A9, после чего *скроем* 6 и 7 – строки (см. рисунок 3).



E9 = =E7-E5

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
9	0	0	3	0	6



E10 = =E9+E8*(-3)/5

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
10	0	0	0	-0,6	0

Рисунок 3 Рисунок 4

6. И последнее, что нужно сделать, чтобы привести матрицу к треугольному виду – это к 9-ой строке прибавить 8-ю, умноженную на (-3/5), после чего *скрыть* 9-ю строку (рисунок 4).

Как вы можете видеть, элементы получившейся матрицы находятся в 1, 5, 8 и 10 строках, при этом ранг получившейся матрицы **r** = 4, следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение. Выпишем получившуюся систему:

$$2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20,$$
$$0,5x_2+0,5x_4=1,$$
$$5x_3+x_4=10,$$
$$-0,6x_4=0.$$

Из последнего уравнения легко находим $x_4=0$; из 3-го уравнения находим $x_3=2$; из 2-го – $x_2=2$ и из 1-го – $x_1=1$ соответственно.

Задание к работе:

Методом Гаусса решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2, & x_1=-0{,}4 \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6, & x_2=-1{,}2 \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3, & x_3=3{,}4 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0. & x_4=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3, & x_1=\dfrac{1}{2}, \\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4, & x_2=-\dfrac{2}{3}, \\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3, & x_3=2, \\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7. & x_4=-3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-2x_3+4x_4=-4, & x_1=\dfrac{2}{3}, \\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4=13, & x_2=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=1, & x_3=\dfrac{3}{2}, \\ 3x_1-9x_2+2x_4=11. & x_4=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7, & x_1=2, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3, & x_2=1, \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1, & x_3=-3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7. & x_4=1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-1, & x_1=-3, \\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32, & x_2=0, \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5, & x_3=-\dfrac{1}{2}, \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8. & x_4=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1, & x_1=\dfrac{2}{3}, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2, & x_2=-\dfrac{43}{18}, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=-5, & x_3=\dfrac{13}{9}, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11. & x_4=-\dfrac{7}{18}. \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Применять метод Гаусса можно к любой системе линейных уравнений?

2. Можно получить множество решений, при решении систем линейных уравнений методом Гаусса?

Практическое занятие

Тема: **Решение систем линейных уравнений.**

Цель: отработать навыки в решении систем линейных уравнений различными способами.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Системы линейных уравнений

Система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij}, b_i – числовые коэффициенты, x_i – переменные, называется *системой линейных уравнений.*

Решить систему линейных уравнений – значит указать все решения системы, то есть такие наборы значений переменных, которые обращают уравнения системы в тождества.

Система линейных уравнений называется:

- совместной, если она имеет хотя бы одно решение;
- несовместной, если она не имеет решений;
- определенной, если она имеет единственное решение;
- однородной, если все $b_i = 0$;
- неоднородной, если все $b_i \neq 0$.

Правило Крамера

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\Delta = \det A \neq 0$;

Теорема. (Правило Крамера):

Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

В случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$;

где **Δ - главный определитель**, составленный из числовых коэффициентов при неизвестных, а Δ_i – **вспомогательный определитель**, получаемый из главного заменой i -го столбца столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример. Решить систему, используя правило Крамера.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Матричный метод

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Этот метод удобен для решения систем невысокого порядка. Он основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем обозначения:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов системы;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ матрица – столбец свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец неизвестных.

Систему уравнений можно записать в матричной форме:

A·X = B.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$,

т.к. $A^{-1}\cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, получим

$X = A^{-1}\cdot B$ - решение матричного уравнения

Пример**.** Решить систему матричным методом $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x+5y-4z=-5, \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$

Решение. Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Получаем матричное уравнение $A\cdot X = B$.

Его решение $X = A^{-1}\cdot B$, т.е.

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 22-40-28 \\ 26-50+36 \\ 38-70+52 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(Нахождение обратной матрицы было рассмотрено ранее).

Ответ: $x=5, \quad y=6, \quad z=10.$

Метод Гаусса

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Определение: Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы, называется матрицей системы.

Определение: Матрица называется расширенной матрицей системы, если к матрице А присоединить столбец свободных членов системы.

$$\left(\begin{array}{l|l} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Расширенная матрица – это закодированная запись системы. Строки матрицы соответствуют уравнениям системы. Умножение уравнения на число и сложение этого произведения с другим уравнением эквивалентно умножению строки матрицы на это число и почленному сложению произведения с другой строкой матрицы. Таким образом, работу с уравнениями можно заменить работой со строками матрицы.

Определение: Матрицу А называют ступенчатой, если:

А) любая ее строка имеет хотя бы один отличный от нуля элемент,

Б) первый отличный от нуля элемент каждой ее строки, начиная со второй, расположен правее неравного нулю элемента предыдущей строки.

Метод Гаусса является эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Он состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему ступенчатого вида, которая легко решается и исследуется. Применение метода Гаусса не зависит ни от числа уравнений, ни от числа неизвестных в системе.

Разберем идею метода Гаусса на конкретных примерах.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем к виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -5y-10z=-40 \\ 6z=18 \end{cases}$$, откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

Задание к работе:

Решить систему уравнений разными методами. (30 вариантов)

№ 1 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 5x_1+4x_2-x_3=0 \\ 3x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$. **№ 2** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ -4x_1+3x_2-4x_3=-2 \\ -2x_1+3x_2-x_3=0 \end{cases}$. **№ 3** $\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 4x_1-x_2+2x_3=7 \\ 3x_1+x_2-6x_3=-4 \end{cases}$

№ 4 $\begin{cases} 7x_1+x_2+2x_3=7 \\ -4x_1+x_2-2x_3=13 \\ x_1-x_2-x_3=2 \end{cases}$. **№ 5** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -x_1+x_2-2x_3=5 \\ 2x_1-12x_2-x_3=5 \end{cases}$. **№ 6**

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+3x_3=-7 \\ 8x_1-x_2+4x_3=-1 \\ -2x_1-x_2-x_3=4 \end{cases}$$

№ 7 $\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3=8 \\ x_1-x_2+2x_3=4 \\ -x_1+x_2-x_3=4 \end{cases}$. **№ 8** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=-1 \\ -x_1+2x_2+3x_3=2 \\ -2x_1-x_3=3 \end{cases}$. **№ 9** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3=1 \\ -x_1-2x_2-x_3=4 \\ 3x_1-x_2-3x_3=12 \end{cases}$.

№ 10 $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3=5 \\ -x_1+2x_2-3x_3=-17 \\ -3x_1-2x_2+4x_3=10 \end{cases}$. **№ 11** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2+2x_3=2 \\ -x_1+x_2-3x_3=8 \end{cases}$. **№ 12** $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3=12 \\ 2x_1-2x_2+x_3=14 \\ 3x_1-2x_2-3x_3=2 \end{cases}$.

№ 13 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$. **№ 14** $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3=-2 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=6 \end{cases}$. **№ 15** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=2 \\ x_1-x_2+3x_3=-1 \\ -2x_1+x_2-2x_3=1 \end{cases}$.

№ 16 $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$. **№ 17** $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2+2x_3=0 \end{cases}$. **№ 18** $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=4 \end{cases}$.

№ 19 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 4x_1-5x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$. **№ 20** $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=-1 \\ 4x_1+x_2-3x_3=1 \\ 5x_1-x_2-4x_3=0 \end{cases}$. **№ 21**

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3=-2 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=6 \end{cases}.$$

№ 22 $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

№ 23 $$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}.$$

№ 24 $$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}.$$

№ 25 $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}.$$

№ 26 $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

№ 27 $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

№ 28 $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

№ 29 $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -4 \end{cases}.$$

№ 30 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Необходимое и достаточное условие существования единственного решения системы линейных уравнений.
2. Определение обратной матрицы. Условие ее существования.
3. Что такое единичная матрица?
4. Основные методы решения системы линейных уравнений.
5. Правило Крамера.

6. Укажите основные моменты решения Метода Гаусса.

Практическое занятие

Тема: Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Цель: научиться решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц.

Если A – квадратная матрица, то *обратной* для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. (Это определение вводится по аналогии с умножением чисел)

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля.

Доказательство:

1. Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Покажем, что $|A| \neq 0$.

   Прежде всего заметим, что можно доказать следующее свойство определителей $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

   Предположим, что $|A| = 0$. Тогда $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0$. Но с другой стороны $|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$. Полученное противоречие и доказывает, что $|A| \neq 0$.

2. Достаточность. Для простоты доказательство проведём для случая матрицы третьего порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и $|A| \neq 0$.

   Покажем, что в этом случае обратной матрицей будет матрица

$$B=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}$$, где A_{ij} алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Найдём $AB=C$.

Заметим, что все диагональные элементы матрицы C будут равны 1. Действительно, например,

$$c_{11}=a_{11}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{12}}{|A|}+a_{13}\frac{A_{13}}{|A|}=\frac{1}{|A|}(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13})=\frac{1}{|A|}\cdot|A|=1.$$

Аналогично по теореме о разложении определителя по элементам строки можно доказать, что $c_{22}=c_{33}=1$.

Кроме того, все недиагональные элементы матрицы C равны нулю. Например,

$$c_{12}=a_{11}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{22}}{|A|}+a_{13}\frac{A_{23}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\left(-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right)=$$

$$=-\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, $AB=E$. Аналогично можно показать, что $BA=E$. Поэтому $B=A^{-1}$.

Таким образом, теорема содержит способ нахождения обратной матрицы.

Если условия теоремы выполнены, то матрица обратная к матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ находится следующим образом

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы A.

Итак, чтобы найти обратную матрицу нужно:

1. Найти определитель матрицы *A*.
2. Найти алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы *A* и составить матрицу A', элементами которой являются числа A_{ij}.
3. Найти матрицу, транспонированную полученной матрице A', и умножить её на $\frac{1}{|A|}$ – это и будет $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A')^T$.

Аналогично для матриц второго порядка, обратной будет следующая матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Примеры.

1. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

$|A| = 2$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

$A_{11} = 2,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = 1.$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \ \frac{1}{|A|}A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A')^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $A \cdot A^{-1} = E$.

2. Найти элементы a_{12}^{-1} и a_{31}^{-1} матрицы A^{-1} обратной данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = 4$. Тогда $a_{12}^{-1} = \frac{1}{4} A_{21} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$.

$a_{31}^{-1} = \frac{1}{4} A_{13} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$. Найдем обратную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9.$$

$A_{11} = 3,\ A_{12} = -6,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = -1,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -1,\ A_{33} = -4.$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},\quad (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}(A')^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Задание к работе:

Задана квадратная матрица А. Найти обратную матрицу и сделать проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение транспонированной матрицы?
2. Как понимать определитель 4 – порядка?
3. Метод обратной матрицы можно применить к любой системе уравнений?

Практическое занятие 6

Тема: Решение простейших задач аналитической геометрии на плоскости.

Цель: отработать навыки в решении задач аналитической геометрии на плоскости.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Вектор. Определение. Упорядоченную совокупность ($x_1, x_2, \dots , x_n$) n вещественных чисел называют *n-мерным вектором*, а числа x_i ($i = \overline{1,n}$) - *компонентами,* или *координатами,* вектора.

Вектор. Пример. Если, например, некоторый автомобильный завод должен выпустить в смену 50 легковых автомобилей, 100 грузовых, 10 автобусов, 50 комплектов запчастей для легковых автомобилей и 150 комплектов для грузовых автомобилей и автобусов, то производственную программу этого завода можно записать в виде вектора (50, 100, 10, 50, 150), имеющего пять компонент.

Вектор. Обозначения. Векторы обозначают жирными строчными буквами или буквами с чертой или стрелкой наверху, например, **a** или $\bar{a}$. Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковое число компонент и их соответствующие компоненты равны.

Компоненты вектора нельзя менять местами, например, (3, 2, 5, 0, 1) ≠ ≠ (2, 3, 5, 0, 1).

Вектор. Операции над векторами. *Произведением* вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2 , \dots ,x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots , \lambda x_n)$.

Суммой векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots ,x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2 , \dots ,y_n)$ называется вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots , x_n + y_n)$.

Вектор. Пространство векторов. *N-мерное векторное пространство* $\mathbf{R}^n$ определяется как множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Вектор. Экономическая иллюстрация. Экономическая иллюстрация n-мерного векторного пространства: *пространство благ* (*товаров*). Под *товаром* мы будем понимать некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Предположим, что существует конечное число наличных товаров n; количества каждого из них, приобретенные потребителем, характеризуются набором товаров

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

где через x_i обозначается количество i-го блага, приобретенного потребителем. Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами пространства товаров $C = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, ... , x_n) \mid x_i \geq 0, i = \overline{1,n} \}$.

Вектор. Линейная независимость. Система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ... , \mathbf{e}_m$ n-мерных векторов называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_m$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 +... + \lambda_m \mathbf{e}_m = 0$; в противном случае данная система векторов называется *линейно независимой*, то есть указанное равенство возможно лишь в случае, когда все $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$. Геометрический смысл линейной зависимости векторов в $\mathbf{R}^3$, интерпретируемых как направленные отрезки, поясняют следующие теоремы.

Теорема 1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Теорема 3. Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Вектор. Левая и правая тройки векторов. Тройка некомпланарных векторов **a, b, c** называется *правой*, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов **a, b, c** в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае **a, b, c** - *левая тройка*. Все правые (или левые) тройки векторов называются *одинаково ориентированными.*

Вектор. Базис и координаты. Тройка $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарных векторов в $\mathbf{R}^3$ называется *базисом*, а сами векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - *базисными*. Любой вектор **a** может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть представлен в виде

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \tag{1}$$

числа x_1, x_2, x_3 в разложении (1) называются *координатами* вектора **a** в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и обозначаются $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$.

Вектор. Ортонормированный базис. Если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты x_1, x_2, x_3 - *прямоугольными.* Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать **i, j, k.**

Будем предполагать, что в пространстве $\mathbf{R}^3$ выбрана правая система декартовых прямоугольных координат $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Вектор. Векторное произведение. *Векторным произведением* вектора **a** на вектор **b** называется вектор **c**, который определяется следующими тремя условиями:

1. Длина вектора **c** численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b,** т. е. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b})$.

2. Вектор **c** перпендикулярен к каждому из векторов **a** и **b.**

3. Векторы **a, b** и **c**, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку.

Для векторного произведения **c** вводится обозначение $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$ или $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Если векторы **a** и **b** коллинеарны, то $\sin(\mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b}) = 0$ и $[\mathbf{ab}] = 0$, в частности, $[\mathbf{aa}] = 0$. Векторные произведения ортов: $[\mathbf{ij}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{jk}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{ki}] = \mathbf{j}$.

Если векторы **a** и **b** заданы в базисе **i, j, k** координатами $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\vec{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\vec{j}(a_1b_3-a_3b_1)+\vec{k}(a_1b_2-a_2b_1).$$

Вектор. Смешанное произведение. Если векторное произведение двух векторов **a** и **b** скалярно умножается на третий вектор **c,** то такое произведение трех векторов называется *смешанным произведением* и обозначается символом **a b c.**

Если векторы **a, b** и **c** в базисе **i, j, k** заданы своими координатами **a**(a_1, a_2, a_3), **b**(b_1, b_2, b_3), **c**(c_1, c_2, c_3), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование - это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Если векторы образуют правую тройку, то их смешанное произведение есть число положительное, равное указанному объему; если же тройка **a, b, c -** левая, то **a b c**<0 и V = **- a b c**, следовательно V =│**a b c**│.

Координаты векторов, встречающиеся в задачах первой главы, предполагаются заданными относительно правого ортонормированного базиса. Единичный вектор, сонаправленный вектору **a,** обозначается символом **a**^{o}. Символом **r=OM** обозначается радиус-вектор точки M, символами a, AB или│**a**│,│**AB**│ обозначаются модули векторов **a** и **AB.**

Пример 2. Найдите угол между векторами **a** = 2**m**+4**n** и **b** = **m-n**, где **m** и **n -** единичные векторы и угол между **m** и **n** равен 120^o.

Решение. Имеем: cos φ = **ab**/ab, **ab** = (2**m**+4**n**) (**m-n**) = 2 **m**^{2} - 4**n**^{2} +2**mn** = = 2 - 4+2cos120^o = - 2 + 2(-0.5) = -3; a = $\sqrt{\bar{a}^2}$ **;** **a**^{2} = (2**m**+4**n**) (2**m**+4**n**) = = 4 **m**^{2} +16**mn**+16 **n**^{2} = 4+16(-0.5)+16=12, значит a = $\sqrt{12}$. b = $\sqrt{\bar{b}^2}$ **;** **b**^{2} =

= **(m-n)(m-n)** = $\mathbf{m}^2$ -2**mn**+ $\mathbf{n}^2$ = 1-2(-0.5)+1 = 3, значит b = $\sqrt{3}$. Окончательно имеем: cos φ = $\frac{-3}{\sqrt{12 \cdot 3}}$ = -1/2, ⇒ φ = 120°.

Пример 3. Зная векторы **AB**(-3,-2,6) и **BC**(-2,4,4),вычислите длину высоты AD треугольника ABC.

Решение. Обозначая площадь треугольника ABC через S, получим: S = 1/2 BC AD. Тогда AD=2S/BC, BC= $\sqrt{\overline{BC}^2}$ = $\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}$ = 6, S = 1/2 |**AB** ×**AC**|. **AC=AB+BC**, значит, вектор **AC** имеет координаты $\vec{AC}(-5,2,10)$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -2 & 6\\ -5 & 2 & 10\end{vmatrix}=\vec{i}(-20-12)-\vec{j}(30-30)+\vec{k}(-6-10)=$$

$$= -16(2\,\bar{i}+\bar{k}).\ |\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}| = \sqrt{16^2(2^2+1)} = 16\sqrt{5};\ S = 8\sqrt{5},\ \text{откуда}$$

$$AD = \frac{16\sqrt{5}}{6} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 4. Даны два вектора **a**(11,10,2) и **b**(4,0,3). Найдите единичный вектор **c,** ортогональный векторам **a** и **b** и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов **a, b, c** была правой.

Решение. Обозначим координаты вектора **c** относительно данного правого ортонормированного базиса через x, y, z.

Поскольку **c** ⊥ **a, c** ⊥ **b**, то **ca** = 0**, cb** = 0. По условию задачи требуется, чтобы c = 1 и **a b c** >0.

Имеем систему уравнений для нахождения x,y,z: 11x +10y + 2z = 0, 4x+3z=0, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Из первого и второго уравнений системы получим z = -4/3 x, y = -5/6 x. Подставляя y и z в третье уравнение, будем иметь: x^2 = 36/125, откуда x = ± $\frac{6}{5\sqrt{5}}$. Используя условие **a b c** >0, получим неравенство

$$\begin{vmatrix} 11 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} > 0 \text{ или } 5(6x-5y-8z) > 0$$

С учетом выражений для z и y перепишем полученное неравенство в виде: 625/6 x > 0, откуда следует, что x>0. Итак, x = $\frac{6}{5\sqrt{5}}$, y = - $\frac{1}{\sqrt{5}}$, z =- $\frac{8}{5\sqrt{5}}$.

Задание к работе:

Вариант 1

1. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось L, если $|\overline{AB}|$ =5, а угол между осью и вектором равен $\frac{\pi}{6}$.
2. Найти проекцию суммы векторов $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ на ось L, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=3$ и угол φ между векторами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и осью L соответственно равен $\frac{\pi}{3},\pi,\frac{\pi}{2}$.
3. Даны точки M_1 (1;2;3) и M_2 (0;-3; 7). Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.
4. Даны векторы $\bar{a}$ =(2;-3;5) и $\bar{b}$ =(1;6;-2).
   Записать векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ в координатной форме.
5. Даны точки $M_1(1;3;-12)$ и $M_2(6;0;3)$. Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 3:2. Найти координаты $M\ (x;\ y;\ z)$.
6. Найти орт вектора $\bar{a}$ =12$\bar{i}$ -4 $\bar{j}$ +3$\bar{k}$ и его направляющие косинусы.
7. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;2;0)$; $B(3;0;-3)$; $C(5;2;6)$.
8. Выясните компланарны векторы $\bar{a}\{-1;2;4\}$, $\bar{b}\{0;5;9\}$ и $\bar{c}\{3;2;6\}$
9. Вычислите объем пирамиды построенной на векторах, данные взять из пункта 8.

Вариант 2

1. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось L, если $|\overline{AB}|$ =4, а угол между осью и вектором равен $\frac{\pi}{3}$.

2. Найти проекцию суммы векторов $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ на ось L, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=2$ и угол φ между векторами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и осью L соответственно равен $\frac{\pi}{3},\pi,\frac{\pi}{2}$.
3. Даны точки M_1 (2;2;4) и M_2 (1;-1; 0). Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.
4. Даны векторы $\bar{a}$ =(1;-3;-4) и $\bar{b}$ =(5;3;0).
   Записать векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ в координатной форме.
5. Даны точки $M_1(2;6;-1)$ и $M_2(4;0;2)$. Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 1:2. Найти координаты M $(x; y; z)$.
6. Найти орт вектора $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ и его направляющие косинусы.
7. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(2;2;-1)$; $B(4;-1;3)$; $C(2;0;-1)$.
8. Выясните компланарны векторы $\bar{a}\{1;-2;0\},\bar{b}\{-2;1;3\}$ и $\bar{c}\{2;1;0\}$
9. Вычислите объем параллелепипеда построенной на векторах, данные взять из пункта 8.

Вариант 3

1. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось L, если $|\overline{AB}|$=3, а угол между осью и вектором равен $\frac{\pi}{4}$.
2. Найти проекцию суммы векторов $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ на ось L, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=6$ и угол φ между векторами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и осью L соответственно равен $\frac{\pi}{3},\pi,\frac{\pi}{2}$.
3. Даны точки M_1 (2;0;-3) и M_2 (1;-1; 2). Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.
4. Даны векторы $\bar{a}$ =(4;-3;0) и $\bar{b}$ =(4;2;-1).
   Записать векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ в координатной форме.
5. Даны точки $M_1(10;4;-2)$ и $M_2(1;8;4)$. Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 3:4. Найти координаты M $(x; y; z)$.
6. Найти орт вектора $\bar{a}=5\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}$ и его направляющие косинусы.

7. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(4;-4;1)$; $B(7;1;1)$; $C(2;7;-1)$.
8. Выясните компланарны векторы $\bar{a}\{-1;2;3\}, \bar{b}\{2;-5;-2\} и\ \bar{c}\{1;-1;0\}$
9. Вычислите объем пирамиды построенной на векторах, данные взять из пункта 8.

Вариант 4

1. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось L, если $|\overline{AB}|$=8, а угол между осью и вектором равен $\frac{\pi}{6}$.
2. Найти проекцию суммы векторов $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ на ось L, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=1$ и угол φ между векторами $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ и осью L соответственно равен $\frac{\pi}{3},\pi,\frac{\pi}{2}$.
3. Даны точки M_1 (4;0;-3) и M_2 (-1;2; 7). Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$.
4. Даны векторы $\bar{a}$ =(-1;3;8) и $\bar{b}$ =(3;-1;-5).

   Записать векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ в координатной форме.
5. Даны точки $M_1(4;3;-5)$ и $M_2(-1;-2;0)$. Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении 1:2. Найти координаты $M\ (x;\ y;\ z)$.
6. Найти орт вектора $\bar{a}=-3\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k}$ и его направляющие косинусы.
7. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(-7;0;3)$; $B(2;1;7)$; $C(-5;4;1)$.
8. Выясните компланарны векторы $\bar{a}\{3;-2;1\}, \bar{b}\{2;-1;-4\} и\ \bar{c}\{4;5;-3\}$
9. Вычислите объем параллелепипеда построенного на векторах, данные взять из пункта 8.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение вектора?
2. Объясните понятие орт вектор?
3. Чем отличается левая от правой тройки векторов?
4. Что можно вычислить смешанным произведением векторов?

Практическое занятие

Тема: Решение задач по теме «Уравнение линии на плоскости»

Цель: научиться решать простые задачи по аналитической геометрии кривых.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Уравнения прямых и кривых на плоскости

Уравнения кривых в большом количестве встречаются при чтении экономической литературы. Укажем некоторые из этих кривых.

Кривая безразличия - кривая, показывающая различные комбинации двух продуктов, имеющих одинаковое потребительское значение, или полезность, для потребителя.

Кривая потребительского бюджета - кривая, показывающая различные комбинации количеств двух товаров, которые потребитель может купить при данном уровне его денежного дохода.

Кривая производственных возможностей - кривая, показывающая различные комбинации двух товаров или услуг, которые могут быть произведены в условиях полной занятости и полного объема производства в экономике с постоянными запасами ресурсов и неизменной технологией.

Кривая инвестиционного спроса - кривая, показывающая динамику процентной ставки и объем инвестиций при разных процентных ставках.

Кривая Филлипса - кривая, показывающая существование устойчивой связи между уровнем безработицы и уровнем инфляции.

Кривая Лаффера - кривая, показывающая связь между ставками налогов и налоговыми поступлениями, выявляющая такую налоговую ставку, при которой налоговые поступления достигают максимума.

Уже простое перечисление терминов показывает, как важно для экономистов умение строить графики и анализировать уравнения кривых, каковыми являются прямые линии и кривые второго порядка - окружность, эллипс, гипербола, парабола. Кроме того, при решении большого класса задач требуется выделить на плоскости область, ограниченную какими-либо кривыми, уравнения которых заданы. Чаще всего эти задачи формулируются так: найти наилучший план производства при заданных ресурсах. Задание ресурсов имеет обычно вид неравенств, уравнения которых даны. Поэтому приходится искать наибольшее или наименьшее значения, принимаемые некоторой функцией в области, заданной уравнениями системы неравенств.

В аналитической геометрии *линия на плоскости* определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, это уравнение имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло “куска плоскости”. Важный класс линий составляют те, для которых функция $F(x,y)$ есть многочлен от двух переменных, в этом случае линия, определяемая уравнением $F(x,y)=0$, называется *алгебраической*. Алгебраические линии, задаваемые уравнением первой степени, суть прямые. Уравнение второй степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или линию, распадающуюся на две прямые.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Прямая на плоскости может быть задана одним из уравнений:

1^0. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Вектор $\mathbf{n}(A,B)$ ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.

2^0. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_o = k\,(x - x_o), \qquad (2)$$

где k - угловой коэффициент прямой, то есть $k = tg\ \alpha$, где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox, M $(x_o,\ y_o)$ - некоторая точка, принадлежащая прямой.

Уравнение (2) принимает вид $y = kx + b$, если M (0, b) есть точка пересечения прямой с осью Oy.

3^0. Уравнение прямой в отрезках:

$$x/a + y/b = 1, \tag{3}$$

где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

4^0. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки - $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

5^0. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно данному вектору $\mathbf{a}(m, n)$:

$$\frac{y-y_1}{n} = \frac{x-x_1}{m}. \tag{5}$$

6^0. Нормальное уравнение прямой:

$$\mathbf{rn}^o - p = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки $M(x, y)$ этой прямой, $\mathbf{n}^o$ - единичный вектор, ортогональный этой прямой и направленный от начала координат к прямой; p - расстояние от начала координат до прямой.

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где α - величина угла, образованного прямой с осью Ox.

Уравнение пучка прямых с центром в точке $A(x_1, y_1)$ имеет вид:

$$y-y_1 = \lambda(x-x_1),$$

где λ - параметр пучка. Если пучок задается двумя пересекающимися прямыми $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то его уравнение имеет вид:

$$\lambda (A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

где λ и μ - параметры пучка, не обращающиеся в 0 одновременно.

Величина угла между прямыми $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ задается формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left|\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}\right|.$$

Равенство $1 + k_1 k = 0$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых.

Для того, чтобы два уравнения

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \tag{7}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \tag{8}$$

задавали одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были пропорциональны:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2.$$

Уравнения (7), (8) задают две различные параллельные прямые, если $A_1/A_2 = B_1/B_2$ и $B_1/B_2 \neq C_1/C_2$; прямые пересекаются, если $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$.

Расстояние d от точки $M_o(x_o, y_o)$ до прямой есть длина перпендикуляра, проведенного из точки M_o к прямой. Если прямая задана нормальным уравнением, то $d = |\mathbf{r}_o\ \mathbf{n}^o - p|$, где $\mathbf{r}_o$ - радиус-вектор точки M_o или, в координатной форме, $d = |x_o \cos\alpha + y_o \sin\alpha - p|$.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Предполагается, что среди коэффициентов уравнения a_{11}, a_{12}, a_{22} есть отличные от нуля.

Уравнение окружности с центром в точке C(a, b) и радиусом, равным R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{9}$$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1. \tag{10}$$

Эллипс, заданный уравнением (2.10), симметричен относительно осей координат. Параметры *a* и *b* называются *полуосями* эллипса.

Пусть a>b, тогда фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Расстояния от точки M(x, y) эллипса до его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = a - \varepsilon x,\ r_2 = a + \varepsilon x.$$

Если же a < b, то фокусы находятся на оси Оу, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon = c/b$, $r_1 = b + \varepsilon x$, $r_2 = b - \varepsilon x$.

<1--уравнение-->

Если a = b, то эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса *a*.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равна по абсолютной величине данному числу 2a.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1. \tag{11}$$

Гипербола, заданная уравнением (11), симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось Ох в точках А (a,0) и А (-a,0) - вершинах гиперболы и не пересекает ось Оу. Параметр *a* называется *вещественной полуосью, b - мнимой полуосью*. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние от фокуса до начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые, уравнения которых $y = \pm\, b/a\, x$ называются *асимптотами* гиперболы. Расстояния от точки M(x,y) гиперболы до ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x - a|,\ r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

Гипербола, у которой a = b, называется *равносторонней*, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнение асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ называются *сопряженными*.

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ - парабола симметрична относительно оси Ох.

2) $x^2 = 2py$ - парабола симметрична относительно оси Оу.

В обоих случаях p>0 и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола, уравнение которой $y^2 = 2px$ имеет фокус $F(p/2,0)$ и директрису $x = -p/2$, фокальный радиус-вектор точки $M(x,y)$ на ней $r = x + p/2$.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$ имеет фокус $F(0, p/2)$ и директрису $y = -p/2$; фокальный радиус-вектор точки $M(x,y)$ параболы равен $r = y + p/2$.

Уравнение $F(x, y) = 0$ задает линию, разбивающую плоскость на две или несколько частей. В одних из этих частей выполняется неравенство $F(x, y)<0$, а в других - неравенство $F(x, y)>0$. Иными словами, линия $F(x, y)=0$ отделяет часть плоскости, где $F(x, y)>0$, от части плоскости, где $F(x, y)<0$.

Прямая, уравнение которой $Ax+By+C = 0$, разбивает плоскость на две полуплоскости. На практике для выяснения того, в какой полуплоскости мы имеем $Ax+By+C<0$, а в какой $Ax+By+C>0$, применяют метод контрольных точек. Для этого берут контрольную точку (разумеется, не лежащую на прямой, уравнение которой $Ax+By+C = 0$) и проверяют, какой знак имеет в этой точке выражение $Ax+By+C$. Тот же знак имеет указанное выражение и во всей полуплоскости, где лежит контрольная точка. Во второй полуплоскости $Ax+By+C$ имеет противоположный знак.

Точно так же решаются и нелинейные неравенства с двумя неизвестными.

Например, решим неравенство $x^2-4x+y^2+6y-12 > 0$. Его можно переписать в виде $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 25 > 0$.

Уравнение $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 25 = 0$ задает окружность с центром в точке $C(2,-3)$ и радиусом 5. Окружность разбивает плоскость на две части - внутреннюю и внешнюю. Чтобы узнать, в какой из них имеет место данное неравенство, возьмем контрольную точку во внутренней области, например, центр $C(2,-3)$ нашей окружности. Подставляя координаты точки C в левую часть неравенства, получаем отрицательное число -25. Значит, и во всех точках, лежащих внутри окружности, выполняется неравенство $x^2-4x+y^2+6y-12 < 0$. Отсюда следует, что данное неравенство имеет место во внешней для окружности области.

Пример 1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y-1 = 0$ под углом 45^o.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $y=kx+b$. Поскольку прямая проходит через точку А, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $1=3k+b$, $\Rightarrow$ $b=1-3k$. Величина угла между прямыми $y= k_1 x+b_1$ и $y= kx+b$ определяется формулой $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k}{1+k_1 k}\right|$. Так как угловой коэффициент k_1 исходной прямой $2x+3y-1=0$ равен $- 2/3$, а угол $\varphi = 45^o$, то имеем уравнение для определения k:

$$(2/3 + k)/(1 - 2/3k) = 1 \text{ или } (2/3 + k)/(1 - 2/3k) = -1.$$

Имеем два значения k: $k_1 = 1/5$, $k_2 = -5$. Находя соответствующие значения b по формуле $b=1-3k$, получим две искомые прямые, уравнения которых: $x - 5y + 2 = 0$ и $5x + y - 16 = 0$.

Пример 2. При каком значении параметра *t* прямые, уравнения которых $3tx-8y+1 = 0$ и $(1+t)x-2ty = 0$, параллельны?

Решение. Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при *x* и *y* пропорциональны, т.е. $3t/(1+t) = -8/(-2t)$. Решая полученное уравнение, находим *t*: $t_1 = 2$, $t_2 = -2/3$.

Пример 3. Найти уравнение общей хорды двух окружностей: $x^2 +y^2 =10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Решение. Найдем точки пересечения окружностей, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2+y^2-10x-10y+30=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 10-10x-10y+30=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(4-x)^2=10 \\ y=4-x \end{cases}$$

Решая первое уравнение, находим значения $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Из второго уравнения - соответствующие значения *y*: $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Теперь получим уравнение общей хорды, зная две точки A(3,1) и B(1,3), принадлежащие этой прямой: $(y-1)/(3-1) = (x-3)/(1-3)$, или $y+ x - 4 = 0$.

Пример 4. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям $(x-3)^2 + (y-3)^2 < 8$, $x > y$?

Решение. Первое неравенство системы определяет внутренность круга, не включая границу, т.е. окружность с центром в точке (3,3) и радиуса $\sqrt{8}$. Второе неравенство задает полуплоскость, определяемую прямой, уравнение которой x = y, причем, так как неравенство строгое, точки самой прямой не принадлежат полуплоскости, а все точки ниже этой прямой принадлежат полуплоскости. Поскольку мы ищем точки, удовлетворяющие обоим неравенствам, то искомая область - внутренность полукруга.

Пример 5. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс, уравнение которого $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Решение. Пусть *M(c, c)* - вершина квадрата, лежащая в первой четверти. Тогда сторона квадрата будет равна 2*c*. Т.к. точка *M* принадлежит эллипсу, ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса $c^2/a^2 + c^2/b^2 = 1$, откуда $c = ab/\sqrt{a^2+b^2}$; значит, сторона квадрата - $2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

Пример 6. Зная уравнение асимптот гиперболы $y = \pm\, 0{,}5\, x$ и одну из ее точек $M(12,\ 3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы.

Решение. Запишем каноническое уравнение гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Асимптоты гиперболы задаются уравнениями $y = \pm\, 0{,}5\, x$, значит, $b/a = 1/2$, откуда $a=2b$. Поскольку *M* - точка гиперболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, т.е. $144/a^2 - 27/b^2 = 1$. Учитывая, что $a = 2b$, найдем b: $b^2=9 \Rightarrow b=3$ и $a=6$. Тогда уравнение гиперболы - $x^2/36 - y^2/9 = 1$.

Пример 7. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC, вписанного в параболу с параметром *p*, предполагая, что точка A совпадает с вершиной параболы.

Решение. Каноническое уравнение параболы с параметром *p* имеет вид $y^2 = 2px$, вершина ее совпадает с началом координат, и парабола симметрична относительно оси абсцисс. Так как прямая AB образует с осью Ox угол в 30^o, то уравнение прямой имеет вид: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. большим количеством графиков

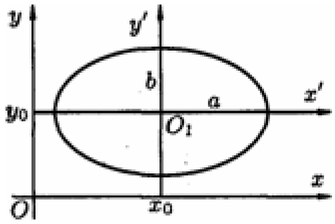
Следовательно, мы можем найти координаты точки B, решая систему уравнений $y^2=2px$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, откуда $x = 6p$, $y = 2\sqrt{3}p$. Значит, расстояние между точками A(0,0) и $B(6p, 2\sqrt{3}p)$ равно $4\sqrt{3}p$.

Общее уравнение линий второго порядка

Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Найдем сначала уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ох и Оу и полуоси соответственно равны а и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ох и Оу и одинаково с ними направленны (см. рисунок 1). В этой системе координат уравнение рисунок 1.

эллипса имеет вид



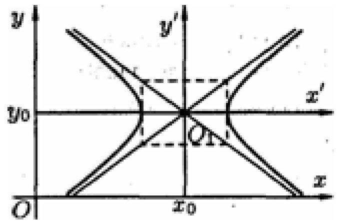
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Так как $x'=x-x_0, y'=x-y_0$, то в старой системе координат

уравнение эллипса запишется в виде

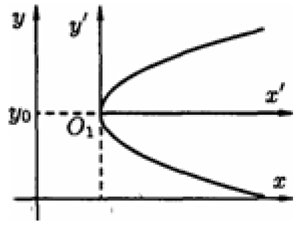
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Аналогично рассуждая, получим уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$ и полуосями а и b (см. рисунок 2):

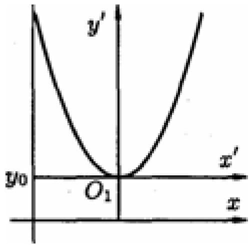


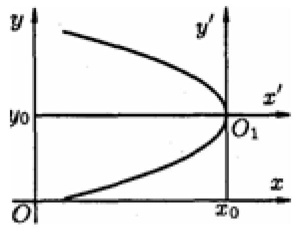
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

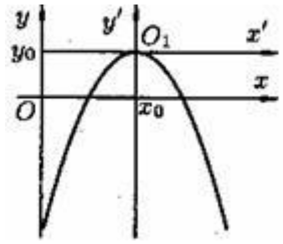
И, наконец, параболы, изображенные на рисунке 3, имеют соответствующие уравнения.



$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \quad (y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$$







$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ $(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$

Уравнение Ас2 + Су2 + 2Dx + 2Ey + F = O

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ после преобразований (раскрыть скобки, перенести все члены уравнения в одну сторону, привести подобные члены, ввести новые обозначения для коэффициентов) можно записать с помощью единого уравнения вида

$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (14)

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (14) определяет одну из кривых (окружность, эллипс, гипербола, парабола) второго порядка?

Ответ дает следующая теорема.

Теорема. Уравнение (14) всегда определяет: либо окружность (при A=C), либо эллипс (при A • C > 0), либо гиперболу (при A • C < 0), либо параболу (при AC = 0). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы - в пару пересекающихся прямых, для параболы - в пару параллельных прямых.

Пример 1. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$4x^2+5y^2+20x-30y+10=0$

Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс $(A \cdot C = 4 \cdot 5 > 0)$.

Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 5\left(y^2 - 6y + 9\right) - 25 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60, \quad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2};3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$.

Пример 2. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением x2 + 10x - 2y + 11 = 0.

Решение: Указанное уравнение определяет параболу (C = 0). Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$(x+5)^2 = 2y + 14, \quad (x+5)^2 = 2(y+7).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5;-7)$ и $p = 1$.

Пример 3. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0 \; (A \cdot C = -4 < 0)$.

Решение: Преобразуем уравнение:

$$4\left(x^2 + 2x + 1\right) - \left(y^2 + 8y + 16\right) - 4 + 16 - 12 = 0$$

$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0$$

$$(2(x+1) + (y+4)) * (2(x+1) - (y+4)) = 0$$

$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые

$2x + y + 6 = 0 \;\; и \;\; 2x - y - 2 = 0$

Общее уравнение второго порядка

Рассмотрим теперь общее уравнение второй степени с двумя неизвестными:

Ax2 + 2Bxy + Cy2 + 2Dx + 2Ey + F == 0. (15)

Оно отличается от уравнения (14) наличием члена с произведением координат $B \neq 0$. Можно, путем поворота координатных осей на угол α, преобразовать это уравнение, чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Используя формулы поворота осей

$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$

выразим старые координаты через новые:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + \\ + C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + \\ 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$$

Выберем угол α так, коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль, т.е. чтобы выполнялось равенство

$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$

т.е. $(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0,$ (16)

т.е. $2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$

Отсюда $tg\alpha = \frac{2B}{A - C}.$ (17)

Таким образом, при повороте осей на угол α, удовлетворяющий условию (17), уравнению (11.15) сводится к уравнению (14).

Вывод: общее уравнение второго порядка (15)определяет на плоскости (если не считать случаев вырождения и распадения) следующие кривые: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

Задание к работе:

Варианты заданий

1. Путем параллельного переноса системы координат привести уравнение гиперболы к виду $\boldsymbol{xy = k}$, указать асимптоты, построить системы координат и данную гиперболу по уравнению $\boldsymbol{xy = k}$.
2. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду с помощью параллельного переноса системы координат. Построить соответствующие системы координат и кривые по их каноническим уравнениям.
3. Привести уравнение кривой второго порядка путем поворота и параллельного переноса системы координат к каноническому виду.

Построить соответствующие системы координат и кривую по ее каноническому уравнению.

4. Решить текстовую задачу.

Вариант № 1

1. $y = \dfrac{4x+3}{2x+4}$

2. а) $2x^2+4x-y-3=0$, б) $2x^2+5y^2-12x+10y-13=0$

3. $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$

4. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от начала координат и точки $A(-5,3)$.

Вариант № 2

1. $y = \dfrac{-3x+7}{x-2}$

2. а) $y=3x^2-18x+19$, б) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$

3. $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$

4. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x, y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

Вариант № 3

1. $y = \dfrac{4x+1}{2x+2}$

2. а) $2x^2+8x-y-5=0$, б) $3x^2+5y^2+12x-25y-15=0$

3. $6xy+8y^2+18x+48y+63=0$

4. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2,2)$ и от оси Ox.

Вариант № 4

1. $y = \dfrac{x+5}{2x+6}$

2. а) $\dfrac{1}{2}x^2-x-y-1=0$, б) $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$

3. $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0$

4. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(3,0)$, чем к оси абсцисс.

Вариант № 5

1. $y = \frac{8x+3}{2x+4}$

2. а) $x^2 - y^2 + 4x + 2y - 12 = 0$, б) $x = 3y^2 + 18y - 19$

3. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$

4. Найти уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(2,0)$, чем к точке $B(8,0)$.

Вариант № 6

1. $y = \frac{6x+7}{3x+9}$

2. а) $y + 2x^2 + 4x + 1 = 0$, б) $4x^2 - y^2 - 8x - 2y + 3 = 0$

3. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$

4. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна $2\sqrt{5}$.

Вариант № 7

1. $y = \frac{3x - 7}{x - 2}$

2. а) $y = 2x^2 + 4x + 3$, б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

3. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$

4. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x, y)$, равноудаленная от точек $A(0,2)$ и $B(4,-2)$.

Вариант № 8

1. $y = \frac{4x+6}{2x+1}$

2. а) $x = -y^2 + 2y + 3$, б) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

3. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

4. Найти уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(-2,0)$.

Вариант № 9

1. $y = \frac{2x - 5}{4x - 6}$

2. а) $y+5x^2-10x-3=0$, б) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$

3. $9x^2-24xy+16y^2+30x-40y-25=0$

4. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x=4$.

Вариант № 10

1. $y=\dfrac{4x+6}{2x+1}$

2. а) $y+x^2-5x-7=0$, б) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

3. $5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$

4. Написать уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении находится вдвое ближе к точке $A(-1,1)$, чем к точке $B(-4,4)$.

Вариант № 11

1. $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$

2. а) $x=3y^2-6y+4$, б) $9x^2+4y^2+18x-18y+49=0$

3. $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$

4. Определить уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(4,0)$.

Вариант № 12

1. $y=\dfrac{8x+2}{2x-3}$

2. а) $x=-\dfrac{1}{3}y^2-6y-19$, б) $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{9}y^2-x+\dfrac{2}{3}y-1=0$

3. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-15=0$

4. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F(0,4)$.

Вариант № 13

1. $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$

2. а) $x^2+y^2-2x-3=0$, б) $16x^2-9y^2-64x-18y-199=0$

3. $x^2-2xy+y^2-2x-6y+4=0$

4. Найти уравнение геометрического места точек, разность расстояний каждой из которых от точки $F_1(-2,-2)$ и точки $F_2(2,2)$ равна 4.

Вариант № 14

1. $y = \dfrac{8x+3}{2x+4}$

2. а) $2x^2 + 8x - y + 1 = 0$, б) $x^2 - 8x - 4y^2 = 0$

3. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

4. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3,0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(6,0)$.

Вариант № 15

1. $y = \dfrac{-2x+3}{x-2}$

2. а) $x - \dfrac{1}{2}y^2 + 2y + 4 = 0$, б) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

4. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $F(-1,0)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$.

Вариант № 16

1. $y = \dfrac{-3x+7}{x+6}$

2. а) $2x^2 + 8x - y + 5 = 0$, б) $x^2 - 8x - 4y^2 - 8y = 0$

3. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$

4. Вывести уравнение геометрического места точек, для которых отношение расстояния до точки $F(-4,0)$ к расстоянию до прямой $4x + 25y = 0$ равно $\dfrac{4}{5}$.

Вариант № 17

1. $y = \dfrac{8x+6}{2x+1}$

2. а) $y + 5x^2 - 10x - 3 = 0$, б) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$

3. $14x^2 + 24xy - 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

4. Определить уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(4,0)$.

Вариант № 18

1. $y=\frac{15x+8}{5x+5}$

2. а) $y+x^2-5x-7=0$, б) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

3. $x^2+2xy+y^2-2x+14y+33=0$

4. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x=4$.

Вариант № 19

1. $y=\frac{2x+5}{2x-7}$

2. а) $y=2x^2+4x+3$, б) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$

3. $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$

4. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x,y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

Вариант № 20

1. $y=\frac{3x+1}{2x-5}$

2. а) $y=4x^2-8x-1$, б) $y^2-6y-x^2+2x=0$

3. $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$

4. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x,y)$, равноудаленная от точек $A(0,2)$ и $B(4,-2)$.

Вариант № 21

1. $y=\frac{2x-1}{3x+6}$

2. а) $x=-y^2+2y+3$, б) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$

3. $x^2+4xy+4y^2+3x+6y+2=0$

4. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(3,0)$, чем к оси абсцисс.

Вариант № 22

1. $y=\frac{2-3x}{x+2}$

2. а) $x=3y^2-6y+4$, б) $9x^2+4y^2+18x-18y+49=0$

3. $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$

4. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(-2,0)$.

Вариант № 23

1. $y=\frac{4x+1}{3x-6}$

2. а) $y+x^2-4x+1=0$, б) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

3. $5x^2+2xy+5y^2-4x+20y+20=0$

4. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(2,0)$, чем к точке $B(8,0)$.

Вариант № 24

1. $y=\frac{6x-5}{2x-6}$

2. а) $3x^2-6x-y+4=0$, б) $x^2-y^2+6x+4y-4=0$

3. $x^2+4xy+4y^2-8x+4y+4=0$

4. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2,2)$ и от оси Ox.

Вариант № 25

1. $y=\frac{x-1}{2x-6}$

2. а) $x^2+y^2-4x-5=0$, б) $16x^2-9y^2+64x+18y-199=0$

3. $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$

4. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна $2\sqrt{5}$.

Вариант № 26

1. $y=\frac{1-2x}{2x+1}$

2. а) $2x^2+4x-y+3=0$, б) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$

3. $5x^2+8xy+5y^2+36x+36y+63=0$

4. Найти уравнение геометрического места точек, разность расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна 4.

Вариант № 27

1. $y=\dfrac{3x-1}{3x+2}$

2. а) $y=-x^2-2x+3$, б) $x^2+y^2+2x-6y+4=0$

3. $3x^2-4xy-2x+4y-5=0$

4. Определить уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $F(-1,0)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $x=-4$.

Вариант № 28

1. $y=\dfrac{4x-3}{4x+5}$

2. а) $y=2x^2+4x+3$, б) $x^2+4y^2+8y+5=0$

3. $4x^2+4xy+y^2-2x-14y+7=0$

4. Определить уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3,0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(6,0)$.

Вариант № 29

1. $y=\dfrac{3-2x}{2x+2}$

2. а) $\dfrac{1}{2}x^2-x-y-1=0$, б) $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$

3. $x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$

4. Написать уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении находится вдвое ближе к точке $A(-1,1)$, чем к точке $B(-4,4)$.

Вариант № 30

1. $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$

2. а) $x=-2y^2+12y+7$, б) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$

3. $5x^2 + 8xy + 3y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

4. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F(0,4)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Укажите уравнение эллипса?
2. Укажите уравнение параболы?
3. Укажите уравнение гиперболы?

Практическое занятие

Тема: Решение задач по теме: «Функции и последовательности»

Цель: научиться ориентироваться в элементарных функциях, научиться задавать последовательности.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Числовые последовательности

Определение. Если каждому n из множества натурального ряда чисел поставлено в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется числовой последовательностью и обозначается $\{x_n\}$, при этом x_n называется общим членом числовой последовательности. Числа x_n называются элементами или членами числовой последовательности.

Например, последовательность с общим членом $x_n = \frac{1}{n}$, будет последовательностью чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots, = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Последовательность с общим членом $x_n = 1 + (-1)^n$ будет последовательностью чисел $0, 2, 0, 2, \ldots, (1 + (-1)^n), \ldots = \{1 + (-1)^n\}$

Арифметическая и геометрическая прогрессия также являются числовыми последовательностями.

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность с общим членом $x_n = x_1 + d\,(n-1)$, где $\boldsymbol{d}$ – разность арифметической прогрессии

Например, 1, 5, 9, …, 4n-3, … ; $x_n = 1 + 4(n-1) = 4n-3$, $d = 4$

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность с общим членом $x_n = x_i\, q^{n-1}$,где q – знаменатель геометрической прогрессии

Например: $3, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \ldots\ldots, \frac{3}{5^{n-1}}, \ldots\ldots; x_n = 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, q = \frac{1}{5}$.

1.1.2. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Числовые последовательности бывают бесконечно большими и бесконечно малыми.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A, сколь угодно большого, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n| > A$$

Например, последовательность натурального ряда чисел 1, 2, …, n, … является бесконечно большой, т.к, какое ни возьми число N, начиная с которого, для $n \geq N$, члены последовательности будут всё-таки больше A.

Последовательность 1, 2, 1, 3, 1, 4, …, 1, n, … не является бесконечно большой, так как для всех нечетных членов этой последовательности неравенство $|x_n| > A$ не будет выполняться.

Определение 1.1.3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε, сколь угодно малого, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Например, геометрическая прогрессия, у которой знаменатель $|q| < 1$, является бесконечно малой числовой последовательностью.

Рассмотрим геометрическую прогрессию с общим членом

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}: \; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}, ...$$

Изобразим точками на числовой оси элементы этой последовательности (см.рис.1.1.)

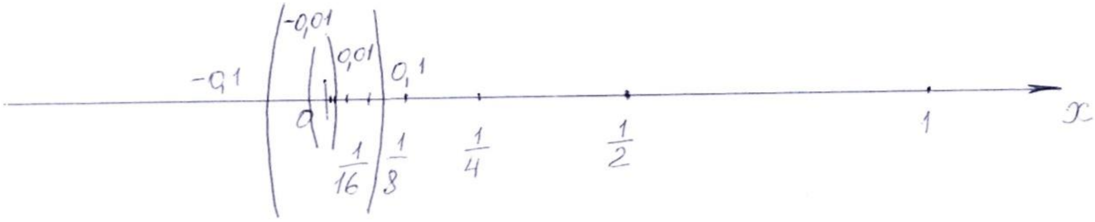


Рис.1.1. Числовая последовательность с общим членом $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Выберем сколь угодно малое число ε, например, ε =0,1. Начиная с номера N =5, для всех членов последовательности справедливо неравенство $x_n<0,1$. Если выбрать ε =0,01, то, начиная с номера N =8, для всех членов последовательности справедливо $x_n<0,01$.

Если в неравенстве $|\alpha_n| < \varepsilon$ раскрыть модульные скобки, то ($-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$) показывает, что начиная с номера N, зависящего от ε , все члены последовательности попадают на интервал ($-\varepsilon$; ε). Для рассмотренного примера, при ε =0,1, начиная с N =5 члены последовательности попадают на интервал(-0,1;0,1); при ε =0,01 на интервал(-0,01;0,01). Чем меньше ε , тем больше номер N. Все члены последовательности приближаются к нулю, но ни при одном n, не обращаются в нуль.

Рассмотрим пример последовательности с общим членом $x_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$,

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...$$

Изобразим точками на числовой оси элементы этой последовательности (см. рис.1.2)

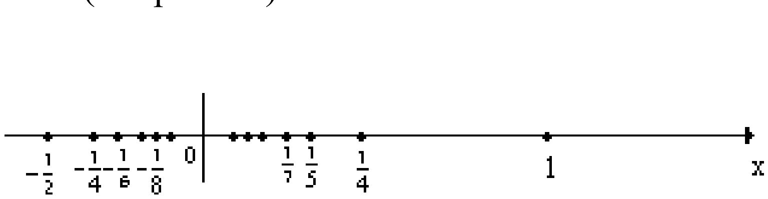


Рис.1.2. Числовая последовательность с общим членом $x_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$

Видно, что члены последовательности приближаются к нулю, при этом ни один элемент последовательности не равен нулю. Для любого, сколь угодно малого, $\varepsilon>0$, можно указать номер N, начиная с которого для всех $n\geq N$, справедливо неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$.

$\varepsilon=0{,}1$, номер $N=11$

$\varepsilon=0{,}01$, номер $N=101$ и т.д.

Значит, последовательность также является бесконечно малой.

Основные свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая. $\{\alpha_n\}+\{\beta_n\}=\{\alpha_n+\beta_n\}=\gamma_n$.

2. Разность двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая $\{\alpha_n\}-\{\beta_n\}=\{\alpha_n-\beta_n\}=\gamma_n$.

3. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая $\{\alpha_n\}\cdot\{\beta_n\}=\{\alpha_n\cdot\beta_n\}=\{\gamma_n\}$.

4. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера n, определена последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой. $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}=\{\alpha_n\}$.

5. Если все члены бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равно нулю, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ бесконечно большая. $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}=\{x_n\}$.

<u>Определение.</u> Если каждому x из множества $\{x\}$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число y, то говорят, что на множестве $\{x\}$ задана функция $y=f(x)$.

x – независимая переменная, <u>аргумент</u> функции;

y – зависимая переменная.

Множество $\{x\}$ - множество определения функции, множество $\{y\}$ - множество её значений.

Рассмотрим примеры функций:

1. $y = x^2$. Эта функция задана на всей числовой оси 0Х, т.е. $(-\infty < x < \infty)$. Множество её значений {y} – полупрямая $0 \le y < \infty$.

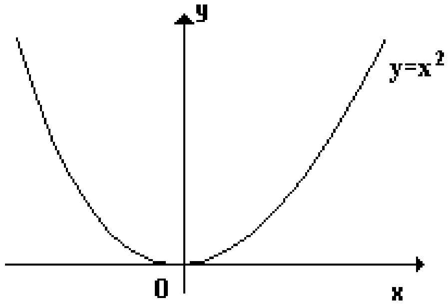


Рис.2.1. График функции $y = x^2$

2. Функция Дирихле (Петер Густав Летен -Дирихле – немецкий математик (1805 – 1859))

$$y = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ – иррациональное число,} \\ 1, \text{если } x \text{ – рациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция задана на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, а множество её значений $\{y\} = \{0;1\}$.

3.

$$y = \begin{cases} +1, \text{если } x>0 \\ sgnx = 0, \text{если } x=0 \\ -1, \text{если } x<0 \end{cases}$$

(*sgn* происходит от латинского слова signum- знак.)

Эта функция задана на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, а множество её значений $\{y\} = \{-1;0;1\}$.

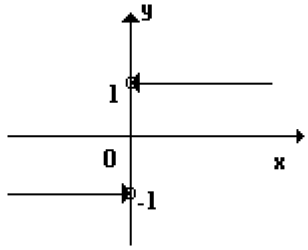


Рис.2.2. График функции y=*sgnx*

4. $y = [x]$,где [x] обозначает целую часть вещественного числа: «*y* равно антье *x*» (от французского слова entier целый).

Это функция задана для любого x, принимает значения целых положительных и отрицательных чисел. Построим график этой функции.

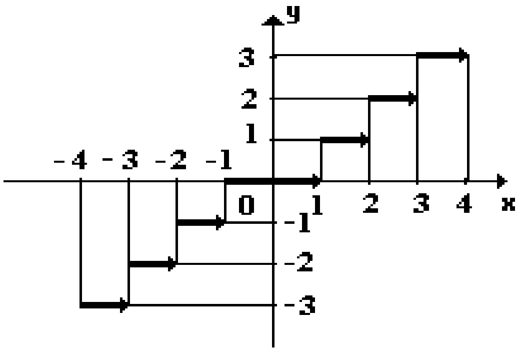


Рис.2.3. График функции $y=[x]$

Способы задания функции:

1. *Аналитический способ* задания

Функция $y=f(x)$ задана аналитическим уравнением связи между переменными
x и y.

Такой вид уравнения называется явным уравнением.

Функция может быть задана аналитическим неявным уравнением $F(x_1 y)=0$.

Например,

1. $y=\sin x$ - явное аналитическое уравнение;

2. $x^2+y^2=a^2$ - неявное аналитическое уравнение.

2. *Табличный способ* задания

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Довольно распространённый способ задания функции, устанавливающий зависимость между переменной x и y. На практике часто неизвестна аналитическая связь между x и y. Если необходимо найти значение y для x , не входящего в таблицу, то используется метод интерполяции, заключающийся в замене функции между её табличными значениями какой-либо простой, легко вычисляемой функцией, например, линейной или квадратной.

3. *Графический способ* задания

В практике физических измерений используется графический способ задания. Связь между переменными x и y задается посредством графика. Например, кривая, снятая на осциллографе.

Основными элементарными функциями называют следующие функции:

1. $y=x^n$ – степенная функция
2. $y=a^x$ – показательная функция
3. $y=log_a x$ – логарифмическая функция
4. $y=sinx$
5. $y=cosx$
6. $y=tgx$ – тригонометрические функции
7. $y=ctgx$
8. $y=arcsinx$
9. $y=arccosx$ – обратные тригонометрические функции
10. $y=arctgx$
11. $y=arcctgx$

Все эти функции подробно изучены и исследованы в школьном курсе элементарной математики.

Бесконечное множество функций получено из элементарных при помощи четырех действий математики, а также при помощи принципа суперпозиции (вложений).

При помощи принципа суперпозиции получают сложные функции.

Определение 2.1.2. Если на множестве {x} задана функция $y=f\{x\}$, а точка x также является функцией $x=\varphi(t)$, заданной на множестве {t}, то на множестве {t} задана сложная функция $y=f[\varphi(t)]$.

В этом состоит принцип суперпозиции. Таких вложений может быть сколь угодно много.

Рассмотрим примеры:

1. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ -рациональная функция;

2. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ - сложная функция;

3. $y = e^{arctgx}$- сложная функция;

4. y=*lnlnlnx* – сложная функция;

5. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ - рациональная функция

Примеры 1 и 5 представляют простые функции, составленные при помощи действий арифметики. В дальнейшем будем их называть рациональными функциями.

Задание к работе:

Вариант 1.

1. Функция задана уравнением *y=2x–4.* Область ее определения – множество *{0,1,2,3,4,5}.* Найти множество значений этой функции.

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел: $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

3. Найти область определения функций:

$$a) y(x) = \sqrt[3]{x-4} + \arccos\frac{x-1}{2x};$$
$$б) y(x) = \lg\left[\lg(x-2)\right] + \frac{1}{x-5}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = tgx^2 + 3x^4 - x^2$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период: $y(x) = \cos(3x+1)$.

Вариант 2

1. Найти множество значений функции $y=4-x^2$, если областью ее определения является множество *X:* а) *X=R*; б) *X=* $(-\infty;0]$..

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел $f(x)=9-\left|x^2\right|$.

3. Найти область определения функций:

$$a) y(x) = \arcsin\frac{x+2}{4-x};$$
$$б) y(x) = \lg(x-7) + 2^{x-3}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = tgx^3 + 4x^9$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период: $y(x) = 10\sin 3x$.

Вариант 3

1. Найти множество значений функции *y=4–* x^2 , если областью ее определения является множество *X*: а) *X=[–2;2];* б) *X= (0;+∞].*

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел, f(x)=$\begin{cases} x, если x < 0 \\ -2x, если x \geq 0 \end{cases}$.

3. Найти область определения функций:
$$а) y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \arcsin\frac{x+3}{2x-1};$$
$$б) y(x) = \lg(x^2 - 3x + 2) + \frac{4}{x^2 - 1}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = x^3 arctg 2x$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x) = \sin^2 x$.

Вариант 4

1. Найти множество значений функции y= x^2 +2, если областью ее определения является множество X: а) X=[–5;2]; б) X= R.

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел f(x)=$\left|9 - x^2\right|$.

3. Найти область определения функций:
$$а) y(x) = \sqrt[3]{x-3} + \arcsin\frac{x+5}{x-4};$$
$$б) y(x) = \sqrt[4]{x^2 - 3x} + \frac{x-1}{2x+6}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = x^4 + 6x^2 + \arcsin 5x.$

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x) = 1 + \cos\frac{\pi x}{2}$.

Вариант 5

1. Найти множество значений функции y= $(x+2)^2 + 3$, если областью ее определения является множество X: а) X=[–5;2]; б) X= R.

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел,

f(x)=$\begin{cases} x - 1, если x \geq 1, \\ -3x + 3, если x < 1. \end{cases}$.

3. Найти область определения функций:

$$а) y(x) = \arcsin\frac{x-4}{x+2} + arctg\frac{x+1}{3};$$

$$б) y(x) = \lg(x-3) + \frac{x^2-1}{3x}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = \sin^5 3x \cdot \cos^2 6x$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x) = \sqrt{tgx}$.

Вариант 6

1. Найти множество значений функции y= $(x+2)^2+3$, если областью ее определения является множество X: а) X= (0;+∞].; б) X= [–2;2].

2. Построить график функции y=3x, зная, что ее область определения есть множество целых чисел.

3. Найти область определения функций:

$$а) y(x) = \sqrt[4]{4+2x-2x^2};$$

$$б) y(x) = \arccos\frac{x-1}{2-x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = \dfrac{\cos x^3 + 7x^{12}}{x^6 + \sin^2 x^3}$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x) = \sin\dfrac{x}{3}$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции:

а) f(x)=5x–2; б) f(x)=$\dfrac{7}{x}$.

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел,

$$f(x)=\begin{cases} x-2, если x \le 0, \\ \dfrac{4}{x}, если x > 0. \end{cases}$$

3. Найти область определения функций:

$$а) y(x) = 3\arcsin\frac{x+5}{2x-7};$$

$$б) y(x) = \lg\left[\lg(x+1)\right] - \frac{x}{x^2+4}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x)=\cos 2x$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции:

а) f(x)= $\frac{5}{x-3}$; б) f(x)=$\frac{3x^2}{(x+1)(x-2)}$.

2. Построить график функции y=2x+5, зная, что ее область определения есть множество целых чисел.

3. Найти область определения функций:

$$a)\,y(x)=\arcsin\frac{x-2}{5x-3};$$
$$б)\,y(x)=\lg(3x-x^2).$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x)=\sin\pi x$.

Вариант 9

1. Найти область определения функции:

а) f(x)= $\frac{8}{\sqrt{x-4}}$; б) f(x)=$\sqrt{x-2}$.

2. Построить график функции, заданной на множестве действительных чисел,

$$f(x)=\begin{cases} -1, если -2\le x\le 0, \\ x, если 0<x<1, \\ 1, если 1\le x\le 3. \end{cases}$$

3. Найти область определения функций:

$$a)\,y(x)=5\arcsin\frac{x-3}{2x-7};$$
$$б)\,y(x)=\lg\frac{x^2+9}{3x}-\frac{2-x}{x+3}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x)=\sqrt[3]{(1-2x)^2}$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x)=\sin(x+1)$.

Вариант 10

1. Каждому числу из множества X={3,4,5} поставлен его делитель из множества натуральных чисел. Является ли это отношение функцией? Почему?

2. Построить график функции $y = |x+3| + 1$, зная, что ее область определения есть промежуток [0,4].

3. Найти область определения функций:

$$а)\, y(x) = \frac{x^2+1}{x-2} - \sqrt[4]{\frac{x+3}{x^2-x+1}};$$

$$б)\, y(x) = \lg(9-x) + \sqrt{x-4}.$$

4. Определить четность нечетность функции $y(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$.

5. Исследовать на периодичность функцию и найти период $y(x) = 3\cos(x-2)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая функция является четной? Приведите примеры.
2. Как определить нечетность функции?
3. Для какой функции график будет симметричен относительно оси ординат?

Практическое занятие

Тема: Вычисление пределов функций. Исследование функций на непрерывность.

Цель: научить вычислять пределы и исследовать функцию на непрерывность.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Рассмотрим функцию *y=f(x)*,заданную на $\{x\}$, и точку *a,* быть может, и не принадлежащую множеству $\{x\}$, но обладающую тем свойством, что любая ε – окрестность точки *a* принадлежит множеству $\{x\}$. Например, точка *a* может быть границей интервала, на котором задана функция.

Определение 1 Число b называется пределом функции *y=f(x)* в точке *x=a*, если для любой сходящейся к *a* последовательности $x_1, x_2, ... x_n, ...$ аргументов *x,* элементы x_n которой отличны от *a*, соответствующая последовательность её значений $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ сходится к b.

Принято записывать: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Определение 2 Число b называется пределом функции *y=f(x)* в точке *x=a*, если для любого $\varepsilon > 0$, сколь угодно малого, найдется отвечающее ему $\delta > 0$, *такое,* что для всех значений аргумента *x,* удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Оба эти определения эквивалентны. Необходимо сделать несколько замечаний, поясняющих смысл этих определений.

Замечание 1. В Определении 1 особенно важно, что элементы $\{x_n\}$ отличны от *a,* а в Определении 2 $|x - a| < \delta$, $\delta > 0$ означает, что *y=f(x)* не определена в точке *x=a,* но при этом может иметь предельное значение в точке *x=a.* Рассмотрим пример.

Пусть $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. Точка *x=1* не входит в область определения *f(x)*. Нетрудно видеть, что *f(x)=x+1,* $x \neq 1$. Построим график (см. рисунок 1)

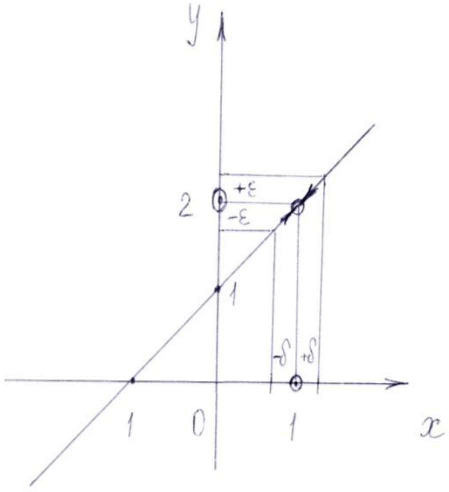


Рисунок 1. График функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

Конечного значения *f(x)* в точке *x=1* не имеет, но для $\varepsilon>0$, сколь угодно малого, для всех значений *arg x,* попадающих в δ - окрестность точки *x=1*, соответствующие значения *f(x)* попадают в ε – окрестность точки *y=2*. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

<u>Замечание 2.</u> Можно перефразировать Определение 2 следующим образом:

Число *b* называется пределом функции *y=f(x)* в точке *a,* если для любого наперед заданного $\varepsilon>0$, сколь угодно малого, можно указать такую δ - окрестность точки *a*,

число *b* приближает значение *f(x)* с точностью до ε

Рассмотрим пример – функцию *y=f(x)*, представленную на рисунке 2. Здесь точка *x=a* принадлежит множеству задания функции {x} и частное значение *f(x}* в точке *x=a* совпадает с предельным значением *f(a)=b.*

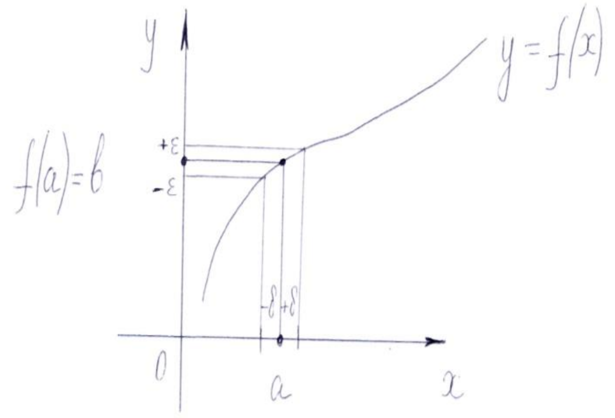


Рисунок.2. Иллюстрация к примеру

Замечание 3. *f(x)* может иметь только один предел, равный *b*. Пример. Пусть *y=f(x)* имеет график функции, как показано на рисунке 3.:

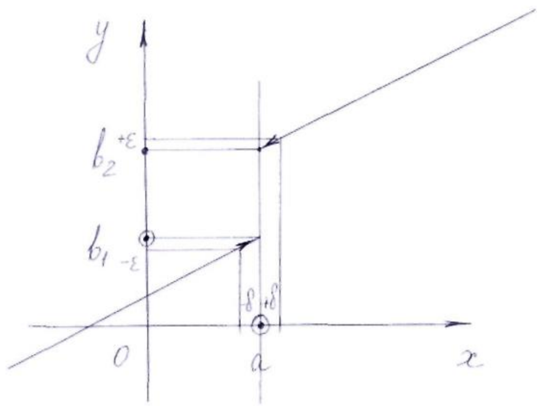


Рисунок 3. Иллюстрация к примеру

На рисунке видно, что *x=a* не входит в область определения *y=f(x)* и конечного значения не имеет. Для всех значений *arg x*, находящихся слева от точки *x=a*, ($a-\delta < x < a$), соответствующие значения функции попадают в ε – окрестность точки b_1 $b_1-\varepsilon< f(x)<b_1$. Для всех значений *arg x*, попадающих на интервал $(a,\ a+\delta)$ справа от точки *x=a*, соответствующие значения функции попадают в ε – окрестность точки $b_2 : b_2-\varepsilon< f(x)<b_2.$, $b_1 \neq b_2$, таким образом в точке *x=a*, функция не имеет конечного предельного значения.

Введем следующие важные понятия:

Определение . Число b называется правым (левым) пределом $y=f(x)$ в точке $x=a$, если для $\varepsilon>0$, сколь угодно малого, найдется отвечающее ему $\delta>0$, что для всех значений $arg\ x$, удовлетворяющих условию

$$a< x <a+ \delta \qquad (a-\delta < x <a)$$

справедливо

$$|f(x)-b|<\delta$$

Для обозначения правого предела принято

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b,$$

левого предела

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b.$$

Очевидно, в рассмотренном примере в точке $x=a$ функция $y=f(x)$ имеет левый и правые пределы: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_2$.

Замечание 4. Если в точке $x=a$ функция $y=f(x)$ имеет правый и левые пределы, и они равны, то $f(x)$ имеет конечное предельное значение в точке $x=a$.

Определение 4. Число b называется пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности $x\to\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности её $arg\ \{x_n\}$, соответствующая последовательность её значений $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

При этом принято обозначать:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

Приведем примеры:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ действительно на рисунке видно, что для всех $x\to\infty$ соответствующие значения $f(x)\to 0$. При $x\to-\infty$ $f(x)$ также имеет предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

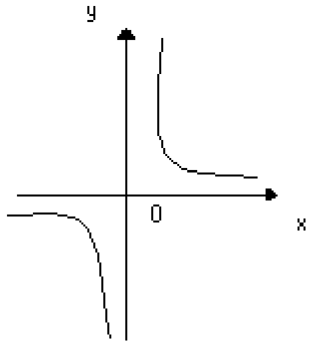


Рисунок 7. График функции $y = \dfrac{1}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

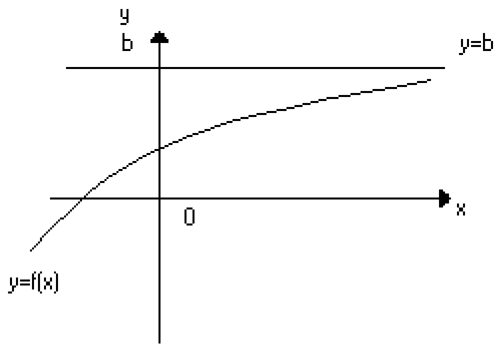


Рисунок 8. График функции, для которой

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

2.3. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций

Определение. Функция *y=f(x)* называется бесконечно малой в точке *x=a* (при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} (x) = 0$. Легко убедиться, что $y = (x-a)^m$ является бесконечно малой. Действительно, $\lim\limits_{x \to a} (x-a)^m = 0^m = 0$ где *m*- любое целое положительное число.

Определение. Функция *y=f(x)* называется бесконечно большой в точке *a* справа (слева), если для любой сходящийся к *a* последовательности заданий аргументов x $x_1,$ $x_2,$ $x_3, \dots, x_n$, элементы которой больше *a* (меньше), соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ является бесконечно большой определённого знака.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty \text{ или } f(a+0) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \text{ или } f(a-0) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty \text{ или } f(a+0) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty \text{ или } f(a-0) = -\infty.$$

Познакомимся с методикой сравнения бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - две заданные на {x} функции, являющиеся бесконечно малыми в точке $x=a$.

1. Функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

2. Функция $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$

3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одинакового порядка малости, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, $k\neq 0$ и $k\neq 1$

4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Пусть *A(x)* и *B(x)* – две бесконечно большие в точке $x=a$ справа функции, т.е.

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x\to a+0} B(x) = +\infty$$

Будем говорить, что, если

$\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \Big\{$ 0, то B(x) – бесконечно большая более высокого порядка роста, чем A(x);

∞, то A(x) – бесконечно большая более высокого порядка роста, чем B(x);

$k,\ k \neq 0$, от A(x) и B(x) – бесконечно большие одинакового порядка роста.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $\alpha(x) = x^3 + 2x^2$, $\beta(x) = x^2$ – обе функции бесконечно малые в точке *x=0*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0}(x+2) = 2$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одинакового порядка малости.

2. $\alpha(x) = (x-1)(x^2+1)$, $\beta(x) = (x-1)(x^2+1)$ – обе функции являются бесконечно малыми в точке x=1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x^{2-1})(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \infty$$

$\beta(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$

3. $A(x) = \frac{1+x}{x}$, $B(x) = \frac{1}{x}$ – обе функции бесконечно большие в точке x=0.

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{(1-x)}{x} \div \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{(1+x)\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0 \pm 0} (1+x) = 1$$

A(x) и B(x) имеют одинаковый порядок роста в точке *x=0* справа и слева.

Убедились, что при сравнении бесконечно малых и бесконечно больших предельное отношение $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ даёт неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ (читается «нуль» на «нуль»), а предел отношения $\lim\limits_{x \to a \pm 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ даёт неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (читается «бесконечность» на «бесконечность»).

Рассмотрим на примерах, как избавляться от неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ для алгебраических функций.

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^3+x+1}{(x+1)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^5+x^3+x+1\right):x^5}{[(x+1):x]^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}=1$$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{4}{-1}=-4.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

При $x\to 1$ бесконечно малой функцией является функция (x-1). Выделим (x-1) в качестве множителя в числителе и в знаменателе. Разделим $\left(x^{100}-2x+1\right)$ на (x-1) «столбиком»:

$$
\begin{array}{l|l}
-\; x^{100}-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\quad x^{100}-x^{99} & x^{99}+x^{98}+x^{97}+x^{96}+x^{95}+\ldots+x-1 \\ \cline{1-1}
\quad -\; x^{99}-2x+1 & \\
\qquad x^{99}-x^{98} & \\ \cline{1-1}
\qquad -\; x^{98}-2x+1 & \\
\qquad\quad x^{98}-x^{97} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -\; x^{97}-2x+1 & \\
\qquad\qquad x^{97}-x^{96} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -\; x^{96}-2x+1 & \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -\; x^{2}-2x+1 & \\
\qquad\qquad\quad x^{2}-x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad -\; -x+1 & \\
\qquad\qquad\qquad -x+1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Аналогично, после деления $\left(x^{100}-2x+1\right)$ на (x-1) столбиком, получим

$\left(x^{50}-2x+1\right)\div(x-1)=x^{49}+x^{48}+x^{47}+x^{46}+....+x+1$, тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+x^{97}+x^{96}+....+x+1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+x^{46}+....+x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{99}+x^{98}+x^{97}+x^{96}+....+x+1}{x^{49}+x^{48}+x^{47}+x^{46}+....+x+1}=\frac{99}{49}$$

Первый и второй замечательные пределы.

Очень часто сравниваются бесконечно малые (бесконечно большие) функции разных классов.

Например, $y=\sin x$ и $y=x$- две бесконечно малые функции в точке x=0. Предельное отношение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$ дает неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$; $y=arctg\ x$ и $y=\arcsin x$ – две бесконечно малые функции в точке x=0, их предельное отношение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{\arcsin x}=\left[\frac{0}{0}\right]$ и т.д.

Избавиться от таких неопределенностей можно, используя I и II замечательные пределы.

I замечательный предел $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Докажем справедливость этого предельного отношения.

Доказательство

Пусть $x\to +0$, тогда и $\sin x\to +0$. Для положительных x справедлива цепочка неравенств $\sin x < x < tg\ x$. (1)

Это утверждение просматривается на тригонометрической окружности. Разделим неравенство (1) на $\sin x$, т.к. $\sin x>0$ для $x>0$, то получим неравенство (2)

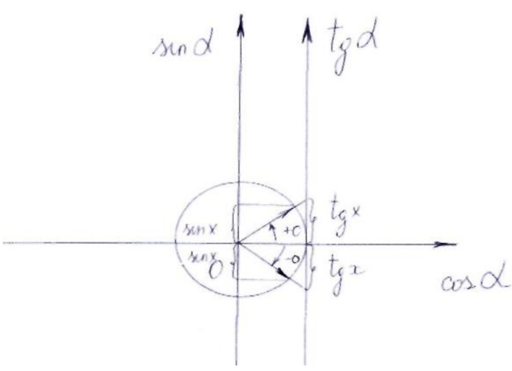


Рисунок 9. Иллюстрация к доказательству

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad (2)$$

Запишем обратное неравенство:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (3)$$

Перейдем к пределу в неравенстве (3) при $x \to +0$, получим $\lim\limits_{x\to+0} \cos x < \lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} < 1$ или $1 < \lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} < 1$,

что значит $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Рассмотрим $x \to -0$. Очевидно, что *tgx < x < sinx*. Разделим на *sinx*, т.к. *sinx<0*, то неравенство поменяет знак.

Получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Запишем обратное неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Перейдем к пределу при $x \to -0$

$\lim\limits_{x\to-0} \cos x < \lim\limits_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} < 1$ или $1 < \lim\limits_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} < 1$, что означает $\lim\limits_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Предельные отношения справа и слева от точки *x=0* равны, следовательно $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Рассмотрим примеры:

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x \cdot 3}{3x} = [t = 3x, т.к..x \to 0, то\_и\_t \to 0] = \lim\limits_{t\to0} \frac{\sin t}{t} * 3 = 3.$

2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 5x}{\sin 25x} = \lim\limits_{x\to o} \frac{\sin 5x * 5x}{5x * \frac{\sin 25x}{25x} * 25x} = \left[\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 25x}{25x} = 1\right] = \lim\limits_{x\to0} \frac{5x}{25x} = \frac{1}{5}.$

3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\cos x * x} = \left[\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1\right] = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

Из I замечательного предела видно, что $\sin x$ ~x (синус бесконечно малого аргумента x эквивалентен x).

Также легко убедиться в эквивалентности бесконечно малых функций:

$arcsinx \sim x$

$arctgx \sim x$

$tgx \sim x$

Эквивалентность бесконечно малых легко приводит к раскрытию неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Рассмотрим примеры**:**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\arcsin 4x} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{4x}=\dfrac{3}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{tg(x^2-1)} \sim \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

II замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e.$

Если $\dfrac{1}{n}=x$, то $x\to 0$ при $n\to\infty$,тогда справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$, при действительном *к*.

$\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^k=\lim\limits_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^k=e^k$, где $t=kx$, при $x\to 0$, $t\to\infty$.

Очень часто II замечательный предел записывают в логарифмической форме. Для этого прологарифмируем равенство по основанию «е»:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\ln e$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ – логарифмическая форма записи.

Отсюда видно, что $ln(1+x)\sim x$.

Рассмотрим примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin x} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{\ln(1+x+x^2+x^3)}\sim\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x+x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)}{x\left(1+x+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{1+x+x^2}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1-3x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

Непрерывность функции в точке и на множестве.

Классификация точек разрыва

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Определение. Все точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва.

Определение. Если функция y=f(x) обладает свойством неопределенности в каждой точке некоторого множества {x}, то говорят, что она непрерывна на множестве.

Рассмотрим важные типы точек разрыва.

1. Точки разрыва первого рода.

1.1.Точки устранимого разрыва I рода/

Точка $x=a$ называется точкой устранимого разрыва I рода, если функция $y=f(x)$ справа и слева от точки $x=a$ имеет конечные и равные предельные значения т.е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Рассмотрим пример. Пусть $y=f(x)$ задана графически (см.рис.2.10), при этом f(a) не определено, т.е. $x=a$ является точкой разрыва.

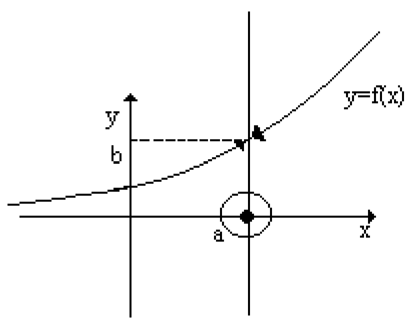


Рисунок 10. Иллюстрация к примеру

Т.к. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b.$, то точка $x = a$ является точкой устранимого разрыва, т.к. функцию можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} f(x), \text{ при } x \neq a \\ b, \text{ при } x = a \end{cases}$$

Вводя предельное значение в область определения функции, устраним разрыв.

1.2. Точки неустранимого разрыва I рода.

Точка $x = a$ является точкой <u>неустранимого разрыва I рода</u>, если справа и слева от точки $x = a$ существуют конечные предельные значения функции, но они не равны, т.е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b_1, \ \lim_{x\to a+0} f(x) = b_2, \ b_1 \neq b_2.$$

Рассмотрим пример. Пусть $y = f(x)$ задана графически и в точке $x = a$ не имеет конечного значения $f(a)$.На рисунке 11 видно, что $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b_2$ и $b_1 \neq b_2$. В точке $x = a$ функция делает «скачок». Точка $x = a$ является точкой неустранимого разрыва I рода.

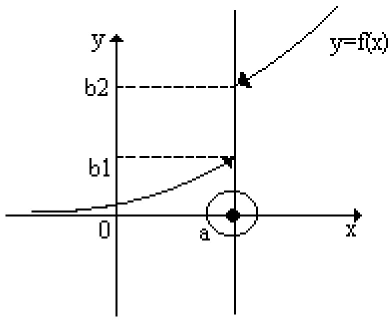


Рисунок 11. Иллюстрация к примеру

2. Точки разрыва II рода

Точка $x = a$ является <u>точкой разрыва II рода,</u> если в этой точке функция не имеет, по крайней мере, одного из односторонних предельных значений или хотя бы одно из односторонних предельных значений бесконечно.

Упрощенно говоря, что все точки разрыва, которые не являются точками разрыва I рода, являются точками разрыва II рода.

Рассмотрим примеры функций? представленных графически (рисунок 12, рисунок 13):

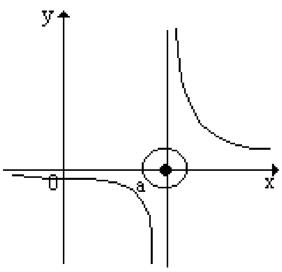


Рисунок 12

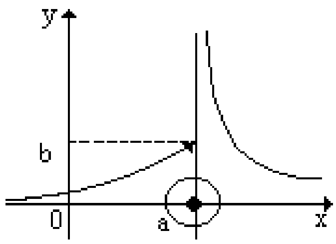


Рисунок 13

Точка $x=a$ на рисунках – *точка разрыва* II *рода*.

Задание к работе:

Вариант 1

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+1}{(n+1)^3}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots}{2+4+6+\ldots}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\pi x}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+\sin x}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$ при $x_1=1, x_2=3$;

б) $y(x)=\begin{cases}0, при x\le 0,\\ x+1, при 0<x\le 1,\\ 2x, при x>1.\end{cases}$

Вариант 2

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^5}{5n^2(3n^3+1)}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+\ldots.}{1+2+2^2+\ldots.}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+tgx}{1-tgx}\right)^{\frac{1}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{x^2+x-6}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin x^2}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=4^{\frac{1}{x-2}}$ при $x_1=2, x_2=4$;

б) $y(x)=\begin{cases}2x, при x\le 0,\\ x^2+1, при 0<x\le 1,\\ 2, при x>1.\end{cases}$

Вариант 3

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2}{\left(2n^2+1\right)n}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\sin x}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin \pi x}{arctg 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ при $x_1=1, x_2=2$;

б) $y(x)=\begin{cases}2x-1, при x\le 0;\\ x^2+1, при 0<x\le 1;\\ 2x, при >1.\end{cases}$

Вариант 4

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{4x}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{tgx^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^6-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$ при $x_1=-1, x_2=1$;

б) $y(x)=\begin{cases}\cos x, при x \le 0;\\ 1-x, при 0<x\le 1;\\ x^2, при x>1.\end{cases}$

Вариант 5

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n-1)(3n-1)(4n-1)}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\ldots\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x^9-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{tg3x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x^2}{tg^2 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^3)}{(arctgx)^3}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=a^{-\frac{1}{x}}(a<1);$

б) $y(x)=\begin{cases}tgx, при x \le 0;\\ x, при 0<x\le 1;\\ 2, при x>1.\end{cases}$

Вариант 6

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+)(n^2+2)}{(2n-1)^4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\ldots\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx^3}{\arcsin^3 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

7. Исследовать функции на непрерывность

а) $y(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4x+3}$ при $x_1=3, x_2=5$;

б) $y(x)=\begin{cases}3x^2, при x \le 0;\\ x, при 0<x\le 1;\\ 2, при x>1.\end{cases}$

Вариант 7

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2(n+2)^5}{(5n-1)^5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots}{1+3+3^2+\ldots}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-tg3x)^{\frac{1}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin\sqrt{x})^2}{2x}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=2^{\frac{1}{x+3}}$ при $x_1=-3, x_2=0$;

б) $y(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, при x\le 0;\\ 1, при 0<x\le 2;\\ x-2, при x>2.\end{cases}$

Вариант 8

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3+1)^3}{1-n^9}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{36}-\ldots\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^9-1}{x^7-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1}{tgx}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+2x+3x^2)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$ при $x_1=2, x_2=3$;

б) $y(x)=\begin{cases}x+1, при x\le 0;\\ 1, при 0<x\le 2;\\ 2x-2, при x>2.\end{cases}$

Вариант 9

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)(1-n^2)}{n^3+1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}+\ldots\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{tg 4x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x^2}{(arctg\pi x)^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-9^x}{8^x+9^x}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$ при $x_1=3, x_2=5$;

б) $y(x)=\begin{cases} x^2+1, при x \le 0; \\ 1-x, при 0<x\le 1; \\ 2x-1, при x>1. \end{cases}$

Вариант 10

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^3+n+1)(n-1)^2}{(n+1)^5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\dots}{1+5+9+\dots}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{x^2+x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+10}\right)^{\frac{x}{2}}$

7. Исследовать функции на непрерывность:

а) $y(x)=5^{\frac{1}{x-4}}$ при $x_1=2, x_2=4$;

б) $y(x)=\begin{cases} -x, при x \le 0; \\ x^2, при 0<x\le 1; \\ x-1, при x>1. \end{cases}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение первому замечательному пределу?
2. Где применяется пределы?
3. Запишите второй замечательный предел в логарифмической форме?

Практическое занятие

Тема: Производные высших порядков.

Цель: научиться вычислять производные высших порядков.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b). Если функция $f'(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то ее производную называют второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$, то есть

$$f''(x_0) = (f'(x_0))'.$$

Производная n-ого порядка определяется аналогично через производную $(n - 1)$ порядка. Пусть функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$. Если в точке $x_0 \in (a, b)$ существует производная функции $f^{(n-1)}(x_0)$, то эту производную называют производной n-ого порядка, то есть

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x_0))', n = 1, 2, \dots,$$

где производная нулевого порядка – это функция $f(x)$.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные n-ого порядка, тогда функция $\alpha \cdot u(x) + \beta \cdot v(x)$ также имеет производную n-ого порядка, причем

$$(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)^{(n)} = \alpha \cdot (u)^{(n)} + \beta \cdot (v)^{(n)}.$$

Формула Лейбница

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные n-ого порядка, тогда функция $u(x) \cdot v(x)$ также имеет производную n-ого порядка, причем

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u''v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Легко выводятся следующие формулы для производной n-ого порядка:

1) $(e^x)^{(n)} = e^x;$

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a,\ a > 0,\ a \neq 1;$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$

5) $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)x^{m-n},\ n < m; \\ m!,\ n = m; \\ 0,\ n > m; \end{cases}$

6) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}};$

7) $\left(\ln(x+a)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}.$

Пример 1. Вычислить вторую производную функции $y = x^2 \ln(x^2+1)$.

Решение

Найдем первую производную, используя формулу нахождения производной произведения, а также правило дифференцирования сложной функции.

$$y' = \left(x^2 \ln(x^2+1)\right)' = \left(x^2\right)' \ln(x^2+1) + x^2(\ln(x^2+1))' = 2x\ln(x^2+1) + x^2 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' =$$

$$= 2x\ln(x^2+1) + x^2 \frac{2x}{x^2+1} = 2x\ln(x^2+1) + \frac{2x^3}{x^2+1} .$$

Найдем вторую производную, используя формулы нахождения производной частного, производной произведения, а также правило дифференцирования сложной функции.

$$y'' = \left(2x\ln(x^2+1) + \frac{2x^3}{x^2+1}\right)' = \left(2x\right)' \ln(x^2+1) + 2x\left(\ln(x^2+1)\right)' + \frac{\left(2x^3\right)'\left(x^2+1\right) - \left(2x^3\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= 2\ln(x^2+1) + 2x\frac{2x}{x^2+1} + \frac{6x^2\left(x^2+1\right) - \left(2x^3\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= 2\ln(x^2+1) + \frac{4x^2}{x^2+1} + \frac{6x^4+6x^2-4x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\ln(x^2+1) + \frac{4x^2}{x^2+1} + \frac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Пример 2. Вычислить вторую производную функции $y = \sqrt{x^2+e^{2x}}$.

Решение

Найдем первую производную, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$y' = \left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + e^{2x}}}(x^2 + e^{2x})' = \frac{2x + e^{2x}(2x)'}{2\sqrt{x^2 + e^{2x}}} = \frac{2x + 2e^{2x}}{2\sqrt{x^2 + e^{2x}}} =$$

$$= \frac{x + e^{2x}}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}}.$$

Найдем вторую производную, используя формулу нахождения производной частного, а также правило дифференцирования сложной функции.

$$y'' = \left(\frac{x + e^{2x}}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}}\right)' = \frac{\left(x + e^{2x}\right)'\left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right) - \left(x + e^{2x}\right)\left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1 + 2e^{2x}\right)\left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right) - \left(x + e^{2x}\right)\dfrac{\left(x^2 + e^{2x}\right)'}{2\sqrt{x^2 + e^{2x}}}}{\left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1 + 2e^{2x}\right)\left(\sqrt{x^2 + e^{2x}}\right) - \left(x + e^{2x}\right)\dfrac{\left(2x + 2e^{2x}\right)}{2\sqrt{x^2 + e^{2x}}}}{\left(x^2 + e^{2x}\right)} =$$

$$= \frac{\left(1 + 2e^{2x}\right)\left(x^2 + e^{2x}\right) - \left(x + e^{2x}\right)^2}{\left(x^2 + e^{2x}\right)\sqrt{x^2 + e^{2x}}} = \frac{x^2 + e^{2x} + 2x^2e^{2x} + 2e^{4x} - x^2 - 2xe^{2x} - e^{4x}}{\sqrt{\left(x^2 + e^{2x}\right)^3}} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2x^2e^{2x} + e^{4x} - 2xe^{2x}}{\sqrt{\left(x^2 + e^{2x}\right)^3}}.$$

Пример 2. Найти производную *n*-ого порядка функции $y = \sqrt{e^{1-3x}}$.

Решение

Преобразуем функцию

$$y = \sqrt{e^{1-3x}} = e^{\frac{1-3x}{2}}.$$

Найдем первую производную:

$$y' = \left(e^{\frac{1-3x}{2}}\right)' = e^{\frac{1-3x}{2}}\left(\frac{1-3x}{2}\right)' = e^{\frac{1-3x}{2}}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Тогда вторая производная равна

$$y'' = \left(-\frac{3}{2}e^{\frac{1-3x}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}e^{\frac{1-3x}{2}}\left(\frac{1-3x}{2}\right)' = e^{\frac{1-3x}{2}}\left(-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Легко увидеть, что каждая последующая производная будет получаться умножением предыдущей функции на коэффициент $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Следовательно,

$$y^{(n)} = e^{\frac{1-3x}{2}}\left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Пример 3. Найти производную n-ого порядка функции $y = \frac{4x+2}{2x+5}$.

Решение

Выделим целую часть дроби:

$$y = \frac{4x+2}{2x+5} = \frac{2(2x+5)-8}{2x+5} = 2 - \frac{8}{2x+5}.$$

Найдем первые три производные данной функции и выведем закономерность, по которой получается n-ая производная:

$$y' = \left(2-8(2x+5)^{-1}\right)' = -8(-1)(2x+5)^{-2}(2x+5)' = -8(-1)(2x+5)^{-2}2.$$

$$y'' = (-8(-1)(2x+5)^{-2}2)' = -8(-1)(-2)(2x+5)^{-3}2^2.$$

$$y''' = -8(-1)(-2)(-3)(2x+5)^{-4}2^3.$$

Тогда легко заметить, что

$$y^{(n)} = -8(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)(2x+5)^{-n-1}2^n.$$

Следовательно,

$$y^{(n)} = -8(-1)^n n!(2x+5)^{-n-1}2^n = -\frac{8\cdot 2^n(-1)^n n!}{(2x+5)^{n+1}}.$$

Пример 4. Найти десятую производную функции $y = 5^x(2x+4)$.

Решение

Заметим, что вторая производная от функции $u = 2x + 4$ равна нулю. Для нахождения десятой производной произведения функций $v = 5^x$ и $u = 2x + 4$ воспользуемся формулой Лейбница, заметив, что все слагаемые в этой формуле, начиная с третьего, будут равны нулю, так как $u^{(k)} = 0$ при $k \geq 2$.

$$(u\cdot v)^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}v.$$

Тогда

$$y^{(10)} = (2x+4)(5^x)^{(10)} + 10(2x+4)'(5^x)^{(9)}.$$

Так как

$$\left(5^x\right)' = 5^x \ln 5, \quad \left(5^x\right)'' = \left(5^x \ln 5\right)' = 5^x \ln^2 5,$$

то легко заметить, что

$$\left(5^x\right)^{(10)} = 5^x \ln^{10} 5; \text{ а } \left(5^x\right)^{(9)} = 5^x \ln^9 5.$$

Тогда имеем:

$$y^{(10)} = 5^x \ln^{10} 5(2x+4) + 20\cdot 5^x \ln^9 x.$$

Задание к работе:

Вариант-1

1. Найти производные высших порядков $f''(0)$, если функция имеет вид: $y(x) = e^{2x}\cdot \sin 3x$.

Вариант-2

1. Найти производные высших порядков $f'''(0)$, если функция имеет вид: $y = 2^{\sin x}\cdot \cos(\sin x)$.

Вариант-3

1. Найти производные высших порядков $f'''(0)$, если функция имеет вид: $f(x) = (x+1)^6$.

Вариант-4

1. Найти производные высших порядков $f''(0)$, если функция имеет вид: $f(x) = e^{2x-1}$.

Вариант-5

1. Найти производные высших порядков $f'''(0)$, если функция имеет вид: $y = \cos^2 x$, $y''' - ?$

Вариант-6

1. Найти производные высших порядков $f^{V}(0)$, если функция имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Вариант-7

1. Найти производные высших порядков $f^{''}(0)$, если функция имеет вид:

$f(x) = arctgx,$ $f''(1) - ?$

Вариант-8

1. Найти производные высших порядков $f^{''}(0)$, если функция имеет вид:

$P = a \cdot \sin 2y$, $\frac{d^4 p}{dy^4} = ?$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной произведения функции?
2. Какая функция получиться при производной нулевого порядка?
3. Чем отличается производная сложной функции от простой?
4. По какой формуле можно найти производную функции нулевого порядка?

Практическое занятие

Тема: Дифференцирование функций. Выполнение приближенных вычислений с помощью дифференциала

Цель: научиться дифференцировать функции и выполнять приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$,

где A − некоторое число, которое не зависит от Δx, а $o(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, а произведение $A\cdot\Delta x$ называется ее дифференциалом в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в этой точке.

Если функция дифференцируема в точке x_0, то ее дифференциал в этой точке равен

$dy = y\,'(x_0)\,\Delta x$.

Для функции $y = x$ имеем $dy = \Delta x$, т. е. дифференциал независимого переменного x совпадает с приращением Δx. Поэтому дифференциал функции $y = f(x)$ записывается в виде

$dy = y\,'(x_0)dx$,

и производная $y\,'$ может быть записана как отношение дифференциалов:

$y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Основные правила вычисления дифференциалов функций те же, что и для вычисления производной.

1) $dc = 0$, где $c = const$;

2) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$;

3) $d(fg) = g\,d\,f + f\,d\,g;$

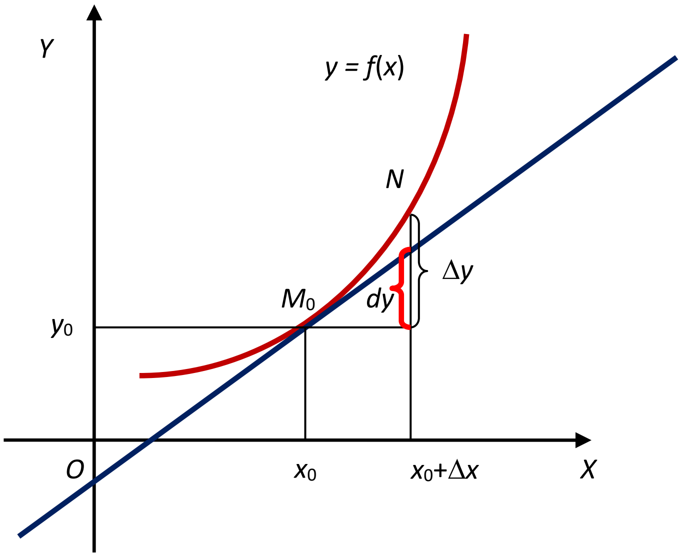
4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,d\,f - f\,d\,g}{g^2}\ (g(x) \neq 0);$

5) $d(f(u)) = f'(u)du.$

Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется *дифференцируемой на этом интервале*. Производная дифференцируемой на интервале функции $y = f(x)$ сама является функцией аргумента x.

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, при изменении аргумента от x_0 до $x_0 + \Delta x$.



Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям

Если приращение $\Delta x \to 0$, то дифференциал dy функции $y = f(x)$ и приращение Δy приближенно равны между собой.

$$\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 1.

Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x} \cdot 5^{\ln \sin x}$.

Решение

Для нахождения дифференциала воспользуемся формулой

$dy = y'(x)dx.$

Найдем производную заданной функции, применив формулу для нахождения производной произведения

$(uv)' = u'v + uv';$

и правило нахождения производной сложной функции:

$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

$$y' = (\sqrt{x}5^{\ln\sin x})' = (\sqrt{x})'5^{\ln\sin x} + \sqrt{x}(5^{\ln\sin x})' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}5^{\ln\sin x} + \sqrt{x}5^{\ln\sin x}\ln 5(\ln\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}5^{\ln\sin x} +$$

$$+\sqrt{x}5^{\ln\sin x}\ln 5\frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{5^{\ln\sin x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}5^{\ln\sin x}\ln 5\cos x}{\sin x}.$$

Тогда

$$dy = 5^{\ln\sin x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ln 5\operatorname{ctg} x\right)dx.$$

Пример 2.

Найти дифференциал функции $y = (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}$.

Решение

$dy = y'(x)dx$ – дифференциал функции $y(x)$.

Найдем производную заданной функции. Функция $y = (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}$ не является ни показательной, ни степенной. Поэтому для нахождения производной этой функции воспользуемся формулой:

$y' = y(\ln y)'.$

Тогда

$$y' = y(\ln(1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x})' = (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}(\arcsin^2 x\ln(1+\operatorname{tg} x))'.$$

По формуле для нахождения производной произведения и по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}\left((\arcsin^2 x)'\ln(1+\operatorname{tg} x) + \arcsin^2 x(\ln(1+\operatorname{tg} x))'\right) =$$

$$= (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}\left(2\arcsin x(\arcsin x)'\ln(1+\operatorname{tg} x) + \arcsin^2 x\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}(1+\operatorname{tg} x)'\right) =$$

$$= (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}\left(\frac{2\arcsin x \ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)\cos^2 x}\right).$$

Тогда

$$dy = (1+\operatorname{tg} x)^{\arcsin^2 x}\left(\frac{2\arcsin x \ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)\cos^2 x}\right)dx.$$

Пример 3.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала $(0{,}998)^{19}$.

Решение

Рассмотрим функцию $y = x^{19}$. В формуле $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$ положим $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}998 - 1 = -0{,}002$.

Найдем значение функции $y = x^{19}$ и значение производной в точке $x_0 = 1$:

$y(1) = 1^{19} = 1;$

$y'(x) = 19x^{18};$

$y'(1) = 19.$

Тогда

$f(x_0 + \Delta x) = f(0{,}998) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x = 1 + 19\cdot(-0{,}002) = 0{,}962.$

Следовательно, $(0{,}998)^{19} \approx 0{,}962$.

Пример 4.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

Решение

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$. В формуле $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$ положим $x_0 = 2$, тогда $\Delta x = 2{,}037 - 2 = 0{,}037$.

Найдем значение функции $y = \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$ и значение производной в точке $x_0 = 2$:

$$y(2) = \sqrt{\frac{2^2-3}{2^2+5}} = \frac{1}{3};$$

$$y'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2x(x^2+5)-2x(x^2-3)}{(x^2+5)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{16x}{(x^2+5)^2};$$

$$y'(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{4-3}{4+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{32}{(4+5)^2}=\frac{3}{2}\frac{32}{81}=\frac{16}{27}.$$

Тогда

$$f(x_0+\Delta x)=f(2,037)\approx\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\cdot 0,037\approx 0,355.$$

Следовательно, $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}\approx 0,355.$

Физические приложения производной и дифференциала.

1.Если $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t, то $S'(t)$ – мгновенная скорость материальной точки, а $dS = S'(t)dt$ – расстояние, которое прошла бы материальная точка за промежуток времени от t до $t + dt$, если бы она двигалась со скоростью, равной мгновенной скорости в момент t.

2.Если $Q(t)$ – количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в момент времени t, то $Q'(t) = I$ – сила тока.

3.Если $N(t)$ – количество вещества, образующегося в момент t в ходе химической реакции, то $N'(t)$ – скорость химической реакции.

Задание к работе:

Вариант-1

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = x^{\sin x}$.

2. Вычислить приближенно: $arctg 1,04$.

3. Разложить многочлен $x^{10}-3x^5+1$ по степеням двучлена х-1

Вариант-2

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

2. Вычислить приближенно: $\ln 1{,}2$.

3. Разложить многочлен $(x^2 - 3x + 1)^3$ по степеням x, пользуясь формулой Тейлора.

Вариант-3

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

2. Вычислить приближенно: $\sqrt[3]{25}$.

3. f(x)-многочлен четвёртой степени. Зная, что $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$,

$f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{IV}(2) = 24$. Вычислить: $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Вариант-4

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

2. Вычислить приближенно: $\sqrt[3]{25}$.

3. Разложить многочлен $x^{10} - 3x^5 + 1$ по степеням двучлена x-1

Вариант-5

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

2. Вычислить приближенно: $arctd\, 0{,}97$

3. Написать формулу Маклорена для функции $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Вариант-6

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = \dfrac{x \cdot e^x \cdot arctgx}{\ln^5 x}$.

2. Вычислить приближенно: arctg 0,97.

3. Известно, что f(x)-многочлен четвёртой степени. Зная, что $f(2) = -1$;
$f'(2) = 0$; $f''(2) = 2$; $f'''(2) = -12$; $f^{IV}(2) = 24$.

вычислить $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Вариант-7

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = \dfrac{(1-x^2)\cdot e^{3x-1}\cdot \cos x}{(\arccos x)^3}$.

2. Вычислить приближенно: $f(x) = e^{x^2-x}$ при x=1,2.

3. Написать формулу Маклорена n-го порядка для функции: $y = \sin\dfrac{5x}{2}$.

Вариант-8

1. Логарифмическое дифференцирование функции: $y = (tg2x)^{ctg\frac{x}{2}}$.

2. Вычислить приближенно значение функции: $f(x) = e^{x^2-x}$ при x=1,2.

3. Написать формулу Маклорена n-го порядка, если: $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Записывается формула Маклорена n-го порядка?
2. Какой часто используют логарифм при логарифмирование функции при вычисление производной?
3. Объясните физическое приложение дифференциала функции?

Практическое занятие

Тема: Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Цель: отработать навыки в нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке; научиться применять производную функции.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Пусть функция y = f (x) непрерывна на отрезке [a; b]. В этом случае, как известно, она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах важно найти те точки отрезка [a; b], которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка [a; b].

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции y = f (x), достаточно:

1. Найти все критические точки, принадлежащие [a; b], и вычислить значения функции в этих точках.
2. Вычислить значения функции на концах отрезка [a; b], то есть найти f (a) и f (b).
3. Сравнить полученные результаты: наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке [a; b]; аналогично, наименьшее из найденных значений является наименьшим значение функции на этом отрезке.

<u>Пример 1.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Решение. 1. Находим критические точки, принадлежащие $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$:

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$, $6(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Вычислим значения функции в этих точках:

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 5 = 9$; $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 5 = 1$.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -11\frac{1}{4};$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

3. Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1) = 9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -11\frac{1}{4}$.

Ответ: $f(-1) = 9$, $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -11\frac{1}{4}$.

<u>Пример 2.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 5\sqrt{2x+1} - x$ на отрезке [4; 40].

Решение. Находим критические точки функции, лежащие внутри данного отрезка:

$$f'(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+1}} - 1,$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0, \\ 4 < x < 40 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12.$$

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке: $f(4) = 11$, $f(12) = 13$, $f(40) = 5$. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[4;\,40]} f(x) = f(12) = 13, \qquad \min_{[4;\,40]} f(x) = f(40) = 5.$$

Ответ: $\max\limits_{[4;\,40]} f(x) = f(12) = 13$, $\min\limits_{[4;\,40]} f(x) = f(40) = 5$.

<u>Пример 3.</u> Дана функция $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$. Найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [2; 6].

Решение. Рассмотрим функцию f на отрезке [2; 6]:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-5 \quad, & 2\le x<5,\\ x^2-6x+5 \quad, & 5\le x<6.\end{cases}$$

Для нахождения критических точек функции f, непрерывной на [2; 6], нужно найти внутренние точки отрезка [2; 6], в которых производная равна нулю или не существует. Имеем:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+6, & 2<x<5,\\ 2x-6 \;, & 5<x<6.\end{cases}$$

В точке x = 5 производная не существует; $f'(x)=0$ при x = 3. Итак, критические точки: 3 и 5.

Вычисляем значение функции в критических точках и на концах отрезка: f (2) = 3, f (3) = 4, f (5) = 0, f (6) = 5;

$$\max_{[2;6]} f(x)=f(6)=5\,,\ \min_{[2;6]} f(x)=f(5)=0\,.$$

Ответ: $\max\limits_{[2;6]} f(x)=f(6)=5\,,\ \min\limits_{[2;6]} f(x)=f(5)=0\,.$

Замечание 1. При нахождении критических точек можно использовать соображения геометрического характера, изобразив схематически график функции.

Замечание 2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции можно упростить, если воспользоваться следующими свойствами непрерывных функций:

1) если функция y = f (x) на отрезке [a; b] непрерывна и возрастает, то m = f (a) и M = f (b);

2) если функция y = f (x) на отрезке [a; b] непрерывна и убывает, то m = f (b) и M = f (a);

3) если функция y = f (x), непрерывная на отрезке [a; b], имеет на этом отрезке только одну точку максимума x_0 (и ни одной точки минимума), то наибольшее значение на данном отрезке есть M = f (x_0);

4) если функция y = f (x), непрерывная на отрезке [a; b], имеет на этом отрезке только одну точку минимума x_0 (и ни одной точки максимума), то наименьшее значение на данном отрезке есть m = f (x_0).

Пример 4. Найти наибольшее значение функции f (x) = x ln 5 – x ln x на отрезке $\left[\frac{5}{3}; 2{,}5\right]$.

Решение. $f'(x)$ = ln 5 – ln x – 1 = $\ln\frac{5}{e} - \ln x$, $f'(x) = 0$ при $x = \frac{5}{e}$. Сравнение значений функции на концах отрезка и в критической точке приводит к сложным вычислениям. Вместо этого проведем исследование функции на монотонность. Учитывая непрерывность функции в точке $x_0 = \frac{5}{e}$ и тот факт, что при $\frac{5}{3} \le x < \frac{5}{e}$ производная положительна, а при $\frac{5}{e} < x \le 2{,}5$ отрицательна, приходим к выводу, что на промежутке $\left[\frac{5}{3}; \frac{5}{e}\right]$ функция возрастает, а на промежутке $\left[\frac{5}{e}; 2{,}5\right]$ убывает. Это и означает, что значение функции в точке $x_0 = \frac{5}{e}$ является наибольшим из всех значений функции на данном отрезке.

Приведем пример задачи геометрического содержания, которая сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.

1. Иногда приходится вводить временно две переменные, одна из которых обязательно длина отрезка, другая – либо длина другого отрезка, либо величина угла.

2. Часто от выбора переменной зависит и сложность решения.

3. В качестве переменной, относительно которой составляется функция для исследования, не обязательно брать искомую величину.

4. Для облегчения исследования функции p, которая **положительна** при всех рассматриваемых значениях переменной, полезно знать, что промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, точки, в которых функция принимает наибольшие и наименьшие значения на заданном промежутке, **не изменятся**, если функцию p заменить на функции kp^n или p + a, где k, a, n – числа, причем k > 0, $n \in \mathbf{R}_{+}$: у всех этих функций

производная равна произведению производной функции p на положительное число.

Поэтому если необходимо рассмотреть, например, такую функцию $8\sqrt{3}\sqrt{x^3-3x^2}>0$, то можно рассмотреть более простую: $\left(\sqrt{x^3-3x^2}\right)^2$, т.е. $x^3 - 3x^2 > 0$. А функцию $4x\sqrt{x^2+\dfrac{2}{x^4}}$, где $x > 0$ можно заменить такой: $\left(x\sqrt{x^2+\dfrac{2}{x^4}}\right)^2$, т.е. $x^4+\dfrac{2}{x^2}$, где $x > 0$.

5.Пояснения и обоснования, связанные с геометрией (обоснование построения угла прямой с плоскостью, построение линейных углов, сечений и т.д.), в экзаменационной работе можно опустить.

Рассмотрим такую задачу: в правильной четырехугольной призме сумма длин высоты и диагонали призмы равна 12. При каком угле наклона этой диагонали к плоскости основания призмы объем призмы будет наибольшим?

У такой задачи может быть одно из следующих дополнительных условий: а) или длина высоты призмы может принимать любые значения из промежутка [1; 5]; б) или длина высоты призмы может принимать любые значения из промежутка]0; 6[; в) или длина диагонали призмы может принимать любые значения из промежутка [7; 11]; г) или длина диагонали призмы может принимать любые значения из промежутка]6; 12[.

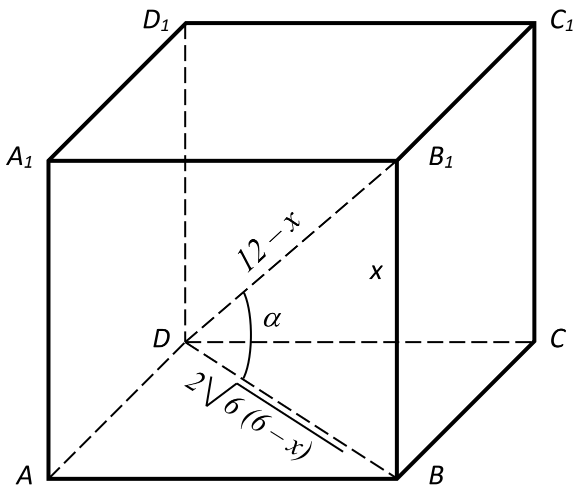


Рис. 1

Теперь дадим подробное решение основной задачи (без дополнительных условий).

Пусть $BB_1 = x$ (рис.1), где $x > 0$ (необходимое условие). $B_1D = 12 - x$, $BD = \sqrt{144-24x+x^2-x^2} = \sqrt{144-24x} = \sqrt{24(6-x)}$.

$V_{ïðèçìû} = \dfrac{BD^2}{2}\cdot BB_1 = \dfrac{24(6-x)}{2}x = 12(6-x)\cdot x$. Рассмотрим непрерывную функцию p(x) = 6x – x^2 при x > 0. $p'(x)=6-2x, p'(x)=0$ при x = 3. При x < 3 $p'(x)>0$, при x > 3 $p'(x)<0$. Значит, функция p, непрерывная в точке 3, возрастает при x ≤ 3 и убывает при x ≥ 3. Следовательно, при x = 3 функция p и $V_{призмы} = 12\cdot p(x)$ будут иметь наибольшие значения. Теперь найдем искомый угол α. Так как $BB_1 = 3$, $B_1D = 9$, то $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$.

Ответ: $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$.

Отметим, что наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке, тесно связаны с таким понятием, как множество значений функции на этом отрезке, а именно имеет место следующая теорема.

Множество значений функции f, непрерывной на отрезке [a; b], есть отрезок [m; M], где $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$, $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Так, в примере 2 множество значений функции на рассматриваемом промежутке есть отрезок [5; 13], в примере 3 – отрезок [0; 5].

Многие задачи, в том числе геометрического содержания (см. пример 5), приводят к необходимости отыскания наибольшего или наименьшего значения функции на открытом промежутке, конечном или бесконечном. Нужно иметь в виду, что функция, заданная на открытом промежутке, даже если она непрерывна, может не иметь на нем наибольшего или наименьшего значения либо ни того, ни другого. Так, например, функция $y = x^2$ на интервалах (-5; -1), (2; 5), (1; +∞) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения, а на интервалах (-3; 2), (-∞; +∞) – наибольшего.

Совершенно очевидно, что правило нахождения наибольшего и наименьшего значений, сформулированное выше для функции, заданной на отрезке, неприменимо к функции, заданной на открытом промежутке (не исключена возможность отсутствия какого-либо из этих значений). В этом случае для решения задачи обычно проводят исследование функции вблизи концевых точек или при $x \to \pm\infty$. Иногда полезно представить график функции схематически.

Пример 5. Правильная треугольная призма имеет объем 16 дм^3. Найти длину стороны основания призмы с наименьшей полной поверхностью.

Решение. Полная поверхность призмы вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$, где a – сторона основания, h – высота призмы. По условию задачи объем призмы равен 16 дм^3, т.е. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = 16$, откуда $h = \frac{64}{a^2\sqrt{3}}$. Имеем:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{128}{a}\right), a > 0.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции на промежутке $(0; +\infty)$.

Проведем исследование функции на монотонность:

$$S' = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 64)}{a^2}, a > 0.$$

Так как на промежутке $(0; 4]$ функция убывает, а на промежутке $[4; +\infty)$ возрастает, то значение функции в точке $x_0 = 4$ наименьшее из всех ее значений на промежутке $(0; +\infty)$.

Итак, полная поверхность призмы наименьшая при стороне основания 4 дм.

Ответ: 4 дм.

В случае если исследование на монотонность затруднительно, часто помогает следующее очевидное утверждение.

Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на множестве X в некоторой точке $x_0 \in X$, то на любом подмножестве X_1 множества X, содержащем точку x_0, функция будет принимать наибольшее (наименьшее) значение в той же точке x_0.

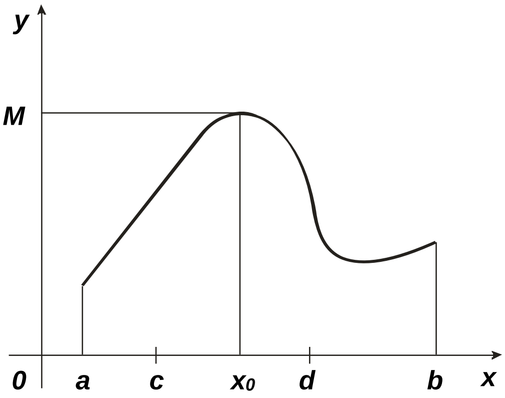


Рис. 2

Например, функция, график которой изображен на рисунке 2, наибольшее значение на отрезке [a; b] принимает в точке x_0. Ясно, что наибольшее значение этой функции на любом промежутке [c; d] (или (c; d)), содержащем точку x_0 и содержащемся в [a; b], достигается также в точке x_0.

Пример 6. Дана функция f(x) = x sin 2x + 0,5 cos 2x. Найти наименьшее значение функции на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Решение. Находим производную f′ (x) = 2x cos 2x. Замечаем, что на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ находится лишь одна критическая точка функции $x_0=\frac{3\pi}{4}$. Рассмотрим функцию f на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Вычисляем значение функции на концах отрезка и в критической точке: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-0{,}5,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{4}$, f (π) = 0,5. Видим, что наименьшее значение функции f на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ достигается в точке $x_0=\frac{3\pi}{4}$ – внутренней точке отрезка. Следовательно, наименьшее значение функции на любом промежутке, являющемся подмножеством отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и содержащем точку $x_0=\frac{3\pi}{4}$, достигается в этой же точке. Интервал $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ является подмножеством отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и точка $x_0=\frac{3\pi}{4}$ принадлежит этому интервалу; следовательно, наименьшее значение функции на $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ достигается в точке $x_0=\frac{3\pi}{4}$.

$$\min_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)} f(x) = \min_{\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}$.

Среди задач на наибольшее и наименьшее значение немало таких, решение которых сводится к исследованию квадратного трехчлена. В этом случае наряду с применением производной можно применить хорошо известный прием выделения полного квадрата. Следует также обратить внимание на тот факт, что функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ достигает экстремального значения при $x_0 = -\frac{b}{2a}$, причем если $a > 0$, то $f(x_0)$ – минимальное, а если $a < 0$ – максимальное значение функции. Можно также построить схематически график функции, используя соображения геометрического характера.

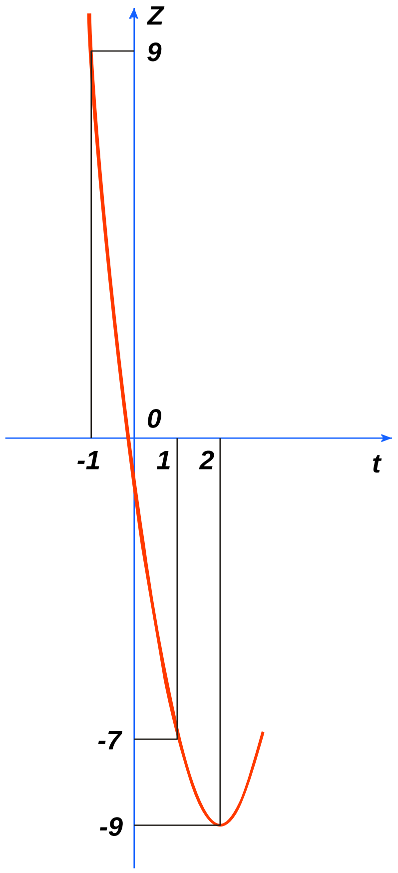


Рис. 3

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos 2x$ – $-8\cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Решение. Представим данную функцию в виде $f(x) = 2\cos^2 x - 8\cos x - 1$, сделаем замену $\cos x = t$. Так как $-1 \leq t \leq 1$ при $0 \leq x \leq 2\pi$, то задача свелась к нахождению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $\varphi(t) = 2t^2 - 8t - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ (рис.3). Критическая точка $t_0 = 2$ не принадлежит отрезку $[-1; 1]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка.

Вычислив $\varphi(-1) = 9$, $\varphi(1) = -7$, получаем, что наибольшее и наименьшее значения функции $\cos 2x - 8\cos x$ соответственно равны 9 и -7.

Ответ: 9; –7.

Решение, приведенное в примере 7, поучительно еще и тем, что оно показывает, как удачная замена переменной может облегчить нахождение производной и критических точек. Так, например, задачу о нахождении наибольшего (или наименьшего) значения функции $\cos^2 x \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ с помощью подстановки $\sin x = t$ можно свести к более простой задаче нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $(1 - t^2)\, t = t - t^3$ на отрезке $[0; 1]$, а нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции $\log_2^3 x - 6\log_2^2 x + 9\log_2 x + 3$ на отрезке $[2; 8]$ подстановкой $\log_2 x = t$ сводится к нахождению наибольшего (наименьшего) значения функции $t^3 - 6t^2 + 9t + 2$ на отрезке $[1; 3]$.

Пример 8. Найти наименьшее значение функции

$$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 3.$$

Решение. Преобразуем функцию следующим образом:

$$y = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 3 =$$
$$= (x^2 - 5x + 4)^2 + 2(x^2 - 5x + 4) + 1 + 2 = (x^2 - 5x + 5)^2 + 2.$$

Ясно, что наименьшее значение функции равно 2 и достигается оно при $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: 2.

Рассмотрим задания, предлагаемые на ЕГЭ по математике разных лет.

Пример 9. (ЕГЭ 2005 $\boxed{\text{С2}}$)

Найдите наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами параллельными осям координат, и с диагональю OP, где O – начало координат, а P – точка на графике функции $y = 49xe^{2-7x} + \frac{9}{x}$, $0{,}2 \le x \le 1$.

Решение. Длины сторон прямоугольника равны положительным координатам точки P. Поэтому его площадь равна их произведению: $S = xy$. Исследуем функцию $S = 49x^2e^{2-7x} + 9$, $0{,}2 \le x \le 1$ с помощью производной.

$$S' = 49(x^2e^{2-7x})' = 49(2xe^{2-7x} - 7x^2e^{2-7x}) =$$
$$= 49xe^{2-7x}(2 - 7x) = 0.$$

Так как $e^{3-6x} > 0$, а по условию $0{,}2 \le x \le 1$, то $x = \frac{2}{7}$ – единственная критическая точка. Найдем значения функции S в концах отрезка [0,2; 1] и сравним их с $S\left(\frac{2}{7}\right) = 49\left(\frac{2}{7}\right)^2 e^0 + 9 = 4 + 9 = 13$.

Так как $e > 2$, то $S(1) = 49e^{-5} + 9 < \frac{49}{32} + 9 < 13$. Так как $e < 3$, то $e^3 < 2^5$, $e^{0,6} < 2$, и $S(0{,}2) = 49 \cdot 0{,}04\, e^{0,6} + 9 =$ $= 1{,}96 \cdot e^{0,6} + 9 < 2 \cdot 2 + 9 = 13$.

Ответ: 13.

Пример 10. (ЕГЭ 2006 $\boxed{\text{B6}}$)

Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых значений функции $ó = 10 \cdot 2^{4\cos^3 x - 4\sin^2 x - 2}$.

Решение. При решении задачи В6 надо проявить умение находить наибольшее и наименьшее значения функции.

Наметим план решения этой задачи. Главное здесь – найти наибольшее и наименьшее значения функции $4\cos^3 x - 4\sin^2 x - 2$. Эта функция с учетом основного тригонометрического тождества приводится к виду $4\cos^3 x + 4\cos^2 x - 6$, причем аргументом этой функции можно считать cos x ∈ [-1; 1]. Итак, после замены t = cos x исследуемая функция $f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 6$, где t ∈ [-1; 1]. Это стандартная задача о поиске наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке. Эти значения достигаются либо в точке экстремума, либо на границе отрезка. Так как производная $f'(t) = 12t^2 + 8t$ обращается в 0 в двух точках: 0 и $-\frac{2}{3}$, то, вычисляя f $\left(-\frac{2}{3}\right) = -5\frac{11}{27}$, f (0) = 2, f (-1) = -6 и f (1) = 2, мы находим наименьшее -6 и наибольшее 2 показателя степени заданной функции.

В итоге наименьшее значение заданной функции равно $10 \cdot 2^{-6}$, а наибольшее равно $10 \cdot 2^2 = 40$. Соответственно, наименьшими и наибольшими целыми значениями функции $ó = 10 \cdot 2^{4\cos^3 x - 4\sin^2 x - 2}$ являются числа 1 и 40.

Ответ: 41.

Пример 11. (ЕГЭ 2005 $\boxed{\text{B5}}$)

Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{12}{x^2 + 2x + 7}$.

Решение. Данная функция представляет собой выражение, числитель которой – положительное число, а знаменатель – квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом.

Следовательно, наибольшее значение данной функции достигается при наименьшем значении знаменателя при $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -1$. Соответственно, $y(-1) = \dfrac{12}{1 - 2 + 7} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 12. (ЕГЭ 2005 $\boxed{\text{C2}}$)

Прямоугольник ABCD расположен на координатной плоскости так, сторона AD лежит на оси ординат, вершина C лежит на параболе $y = x^2 - 6x + 8$, а вершина B – на параболе $y = -x^2 + 3x - 3$, причем абсцисса вершины B принадлежит отрезку [0,9; 2,8]. Какое значение должна иметь абсцисса вершины B, чтобы площадь прямоугольника ABCD была наибольшей?

Решение. Пусть x – абсцисса точек C и B, тогда $x \in [0{,}9; 2{,}8]$. Если $AB = x$ $(x > 0)$, то $CB = x^2 - 6x + 8 - (-x^2 + 3x - 3) = 2x^2 - 9x + 11$. Следовательно, $S_{ABCD} = AB \cdot CD = x(2x^2 - 9x + 11) = 2x^3 - 9x^2 + 11x$. Исследуем непрерывную функцию $S(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x$ на отрезке [0,9; 2,8]. Вычислим производную $S'(x) = 6x^2 - 18x + 11$, она равна 0 при аргументах $x_1 = \dfrac{9 - \sqrt{15}}{6}$ и $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{15}}{6}$. Установим порядок следования на числовой оси точек, участвующих в решении задачи:

$$\frac{9-\sqrt{15}}{6} < 0{,}9 < \frac{9+\sqrt{15}}{6} < 2{,}8\,.$$

Так как функция S (x) имеет минимум при $x = \frac{9+\sqrt{15}}{6}$, убывает на промежутке $\left[0{,}9; \frac{9+\sqrt{15}}{6}\right]$ и возрастает при условии $x > \frac{9+\sqrt{15}}{6}$. Отсюда следует, что для нахождения наибольшего значения функции S (x) необходимо вычислитель ее значения в точках x = 0,9 и x = 2,8, и взять большее из них.

Вычислим S (0,9) = 0,9 (2 · 0,81 – 9 · 0,9 + 11) = 4,068 и S (2,8) = 2,8 (2 · 7,84 – 9 · 2,8 + 11) = 4,144.

Итак, площадь прямоугольника ABCD будет наибольшей, если абсцисса точки B равна 2,8.

Ответ: 2,8.

Задание к работе:

1. Исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения на данном промежутке.

а) $y = x^3 - x$, $x \in [0;4]$ б) $y = x^4 - 8x^2 - 9$, $x \in [-1;3]$

в) $y = x - 2\ln x$, $x \in [1;e]$ г) $y = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x$, $x \in [-1;1]$

д) $y = 2\sin 2x + \cos 4x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

2. Найти множество значений функции

а) $y = \ln x - x$ б) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$

в) $y = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}$ г) $y = \cos^2 x + \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

3. Найти точку графика функции $y = \ln x$, сумма расстояний, от которой до оси ординат и до прямой $y = 2{,}4x$ наименьшая (задача выпускного экзамена для классов с углубленным изучением математики)

4. Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого, должна быть равна диагонали основания, а площадь основания – 4 кв.м. При каких значениях сторон основания площадь поверхности постамента наименьшая.

5. Определить значение параметра а так, чтобы сумма квадратов корней трехчлена $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ была наименьшей.

6. Найти все значения а из промежутка $[1;+\infty)$, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает наибольшее значение.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Где применяется наименьшее и наибольшее значение функции?
2. Объясните наибольшее и наименьшее значение на графике?

Практическое занятие

Тема: Правило Лопиталя. Нахождение асимптот кривой.

Цель: научиться применять правило Лопиталя и находить асимптоты кривой.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Пусть при $x \to a$ для функций $f(x)$ и $g(x)$, *дифференцируемых* в некоторой окрестности точки a, выполняются условия:

1) либо $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, либо $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$,

2) существует предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

тогда $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта теорема называется ***правилом Лопиталя***. Она позволяет вычислять пределы отношения функций, когда и числитель, и знаменатель стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Правило Лопиталя, как говорят математики, позволяет избавляться от неопределённостей типа: $0 / 0$ и ∞ / ∞.

Примеры. 1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

При неопределённостях другого типа: $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, 0^0, ∞^0, 1^∞ нужно проделать предварительно ряд *тождественных* преобразований, чтобы привести их к какой-то из двух неопределённостей: либо $0 / 0$, либо ∞ / ∞. После этого можно применять правило Лопиталя. Покажем некоторые из возможных преобразований указанных неопределённостей.

1) $\infty - \infty$ **:**

пусть $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, тогда данная неопределённость приводится к типу $0/0$ следующим преобразованием:

$$f(x)-g(x)=\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/[f(x)\cdot g(x)]}.$$

2) **$\infty \times 0$:**

пусть $f(x)\to\infty,\ g(x)\to 0$, тогда данная неопределённость приводится к типу $0/0$ или ∞/∞ с помощью преобразований:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

3) остальные неопределённости приводятся к первым двум с помощью логарифмического преобразования: $\log f(x)^{g(x)}=g(x)\cdot\log f(x)$.

Если после применения правила Лопиталя неопределённость типа $0/0$ или ∞/∞ осталась, нужно применить его повторно. Многократное применение правила Лопиталя может привести к требуемому результату. Правило Лопиталя применимо и в случае, если $x\to\infty$.

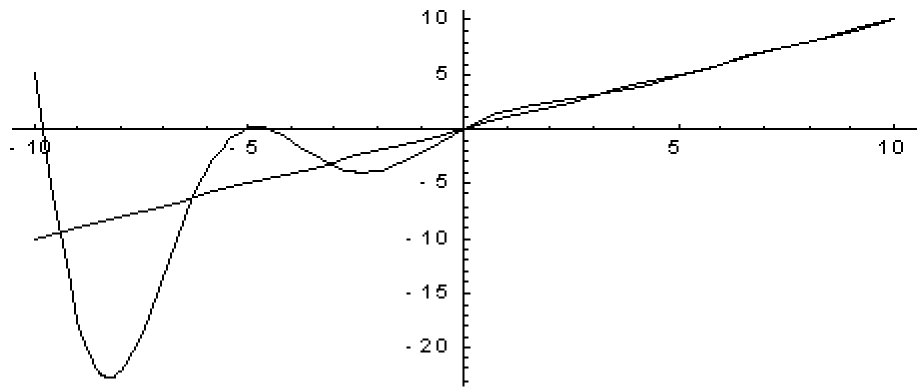
Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

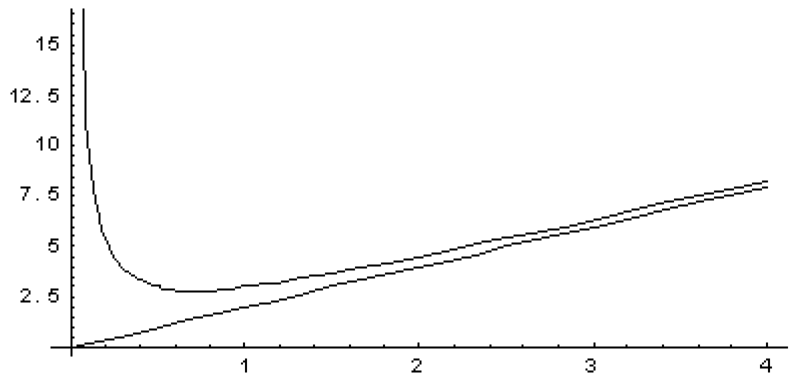
Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.



Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим j. Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\bar{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, ÐNMP = j, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол j - постоянный и не равный 900, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$

$$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x®¥, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0;\quad \lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Задание к работе:

Вариант 1

1. Для следующей функции найти экстремум, если

$$y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=\frac{a}{x}\ln\frac{x}{a}(a>0)$.

3. Найти асимптоты линии: $(y+x+1)^2=x^2+1$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{tgx}$.

Вариант-2

1. Для следующей функции найти экстремум, если $y=x-2\sin^2 x$.

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$.

3. Найти асимптоты линии: $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если $y=\frac{\ln x}{x}$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Вариант-3

1. Для следующей функции найти экстремум, если $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=e^{arctgx}$.

3. Найти асимптоты линии: $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если $y=\frac{1}{x\cdot\ln x}$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$

Вариант-4

1. Для следующей функции найти экстремум, если $y=\ln(x^2+1)$.

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=e^{arctgx}$.

3. Найти асимптоты линии: $y=x\cdot e^{\frac{2}{x}}+1$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если $y=x^2\cdot\ln x$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}(tgx)^{2x-\Pi}$

Вариант-5

1. Для следующей функции найти экстремум, если
$y=\ln(x^2+1)$

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=x^5-5x^4+\dfrac{20}{3}x^3+3x+1$

3. Найти асимптоты линии: $y=2x+arctg\,\dfrac{x}{2}$

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если
$y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$.

Вариант-6

1. Для следующей функции найти экстремум, если
$y=\dfrac{e^x}{(x+3)^2}$.

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=x^5-5x^4+\dfrac{20}{3}x^3+3x+1$

3. Найти асимптоты линии: $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-4}$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если
$y=x^2\cdot\ln^2 x.$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\Pi}{2\cos x}\right)$.

Вариант-7

1. Для следующей функции найти экстремум, если
$y=\dfrac{e^x}{(x+3)^2}$.

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y=x^4-8x^3+24x^2$.

3. Найти асимптоты линии: $y=x\cdot arctgx.$

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если
$y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}.$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$.

Вариант-8

1. Для следующей функции найти экстремум, если

$y = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

2. Найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графика функции: $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

3. Найти асимптоты линии: $y = \frac{x^2}{(x+3)^2}$.

4. Провести полное исследование функции и построить ее график, если $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 1+0} \ln x \ln(x-1)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. В чем смысл правило Лопиталя?
2. Дайте определение понятию асимптота?
3. Как найти точки перегиба функции?

Практическое занятие

Тема: Исследование функций с помощью производной и построение графиков.

Цель: отработать навыки в применении производной и научиться строить графики функции.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Общая схема исследования функции

- Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
- Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
- Найти точки пересечения с осями координат.
- Установить, является ли функция чётной или нечётной.
- Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
- Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
- Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
- Найти наклонные асимптоты функции.
- Построить график функции.

Примеры решений: исследование функции, построение графика

Разные функции (многочлены, логарифмы, дроби) имеют свои особенности при исследовании.

Задача 1. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$f(x)=\frac{(x-2)^3}{x^2-4x-12}$$

Представим функцию в виде: $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{(x+2)(x-6)}$.

Область определения функции D (f) – вся числовая прямая, за исключением точек $x = -2$ и $x = 6$, т.е.

$$(-\infty;-2) \cup (-2;6) \cup (6;+\infty).$$

Функция непериодическая; исследуем её на четность, нечетность

$$f(-x) = \frac{(-x-2)^3}{(-x)^2 - 4(-x) - 12} \neq f(x),$$

$$f(-x) = \frac{(-x-2)^3}{(-x)^2 - 4(-x) - 12} \neq -f(x).$$

Следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

Найдём точки пересечения графика с осями координат:

с осью Оy график пересекается при $x = 0$, при этом

$$y = f(0) = \frac{2}{3},$$

т.е. М $(0; \frac{2}{3})$ – точка пересечения с осью Оy;

с осью Оx график пересекается в точках, в которых $f(x) = 0$, т.е.

$$\frac{(x-2)^3}{x^2 - 4x - 12} = 0,$$

откуда $x = 2$.

Таким образом, М (2; 0) – точка пересечения с осью Оx.

Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{x^2-4x-12} > 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-6) > 0,$$

т.е. при $x \in (-2;2) \cup (6;+\infty)$.

Аналогично $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;-2) \cup (2;6)$.

Так как

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{(x-2)^3}{(x+2)(x-6)} = \lim_{x \to -2-0} \frac{(-64)}{(-0)\cdot(-8)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{(x-2)^3}{(x+2)(x-6)} = \lim_{x \to -2+0} \frac{(-64)}{(+0)\cdot(-8)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 6-0} \frac{(x-2)^3}{(x+2)(x-6)} = \lim_{x \to 6-0} \frac{64}{8\cdot(-0)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 6+0} \frac{(x-2)^3}{(x+2)(x-6)} = \lim_{x \to 6+0} \frac{64}{8\cdot(+0)} = +\infty,$$

то $x=-2$ и $x=6$ являются точками разрыва второго рода,

а прямые $x=-2$ и $x=6$ – вертикальными асимптотами.

Поскольку

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)^3}{x^2-4x-12} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x-12} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot x^2 \cdot \left(1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(1-\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}\right)} = +\infty,$$

а $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-2)^3}{x^2-4x-12} = -\infty,$

то горизонтальных асимптот график функции не имеет.

Наклонная асимптота задаётся уравнением $y = kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-4x^2-12x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^{23}-4x^2-12x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+24x-8}{x^2-4x-12}=-2,$$

т.е. прямая $y=x-2$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Найдём интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x)=\frac{3(x-2)^2\cdot(x^2-4x-12)-(x-3)^3\cdot(2x-4)}{(x-6)^2\cdot(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(x-2)^2\cdot(x^2-4x-44)}{(x-6)^2\cdot(x+2)^2}=\frac{(x-2)^2\cdot(x-2-4\sqrt{3})\cdot(x-2+4\sqrt{3})}{(x-6)^2\cdot(x+2)^2}.$$

Воспользуемся методом интервалов для исследования знака производной (см. рисунок 1):

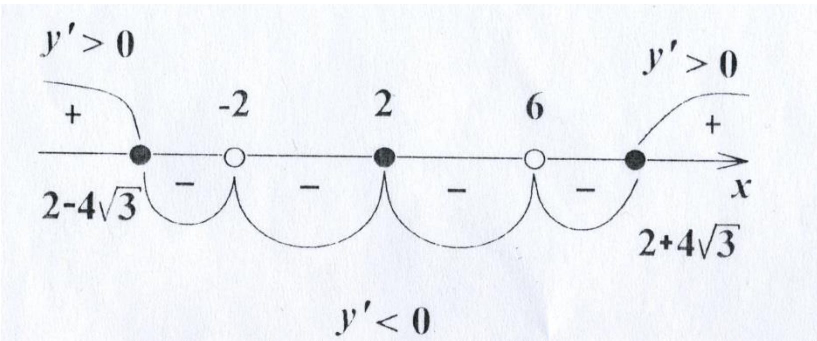


Рисунок 1

При $x<2-4\sqrt{3}$ и при $x>2+4\sqrt{3}$ производная $f'(x)>0$, следовательно, функция возрастает.

При $2-4\sqrt{3}<x<-2$, $-2<x<2$, $2<x<6$ и $6<x<2+4\sqrt{3}$ производная $f'(x)<0$, следовательно, функция убывает.

При переходе через точку $x=2-4\sqrt{3}$, производная меняет знак с «+» на «–», значит это точка локального максимума.

При переходе через точку $x=2+4\sqrt{3}$, производная меняет знак с «–» на «+», значит это точка локального минимума.

При переходе через точку $x = 2$, производная знака не меняет, значит в этой точке функция экстремумов не имеет.

Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x)=\frac{32(x-2)\cdot(x^2-4x+104)}{(x-6)^3\cdot(x+2)^3}.$$

Применим метод интервалов для исследования знака второй производной (см. рис. 2):

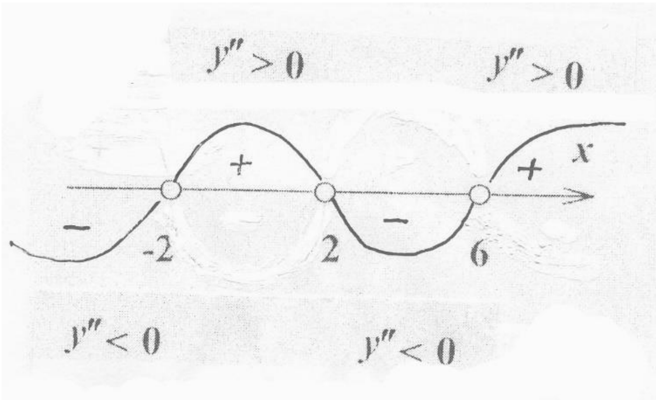


Рисунок 2

При $-2<x<2$ и $x>6$ $f''(x)>0$, следовательно, функция выпукла вниз,

При $x<-2$ и $2<x<6$ $f''(x)<0$, следовательно, функция выпукла вверх.

Учитывая всю полученную информацию о функции, строим график:

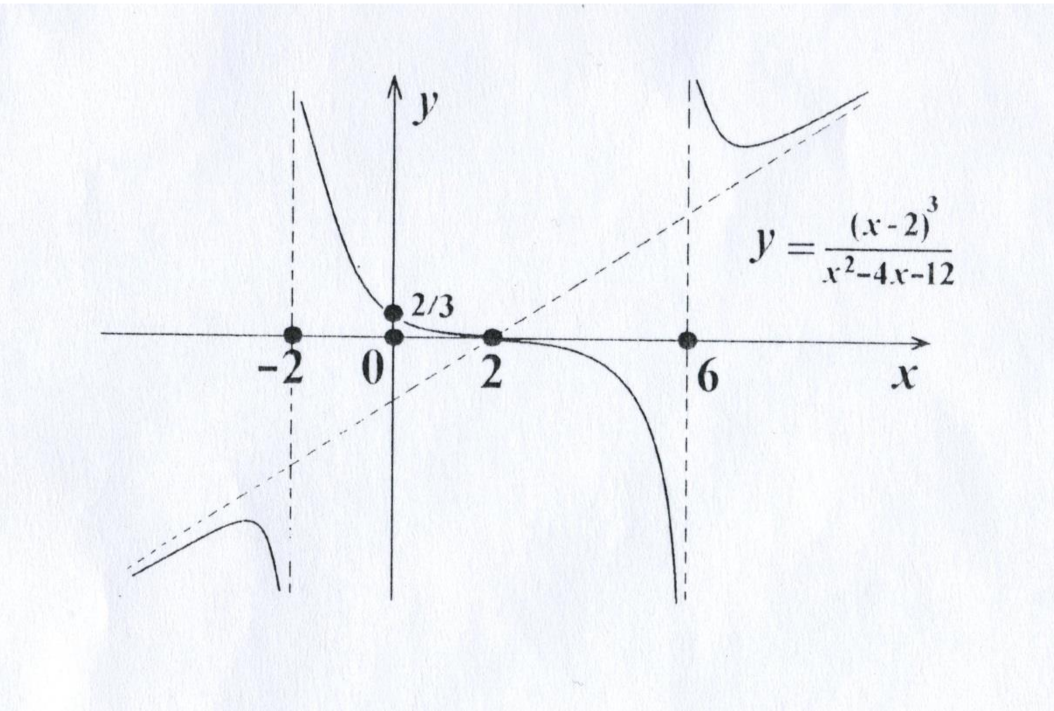


Рисунок 3

Задание к работе:

Задача 1. Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = -\frac{1}{4}\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)$$

Задача 2. Исследовать функцию с помощью производной и построить график.

$$y = \ln\frac{x+1}{x+2}$$

Задача 3. Провести полное исследование функции и построить график.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$$

Задача 4. Исследовать функцию методом дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$$

Задача 5. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Задача 6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \frac{x^3}{2(x+5)^2}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите наименование программ позволяющие строить графики функций?
2. Объясните понятие вогнутости функции?
3. Как изображается но графике экстремум функции?
4. Сформулируйте признаки возрастания и убывания функции. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции. Дайте определение максимума и минимума функции.

5. Какие значения аргумента (какие точки) называются критическими? Как найти эти точки? Каковы достаточные признаки существования экстремума функции?

6. Дайте определение выпуклости, вогнутости кривой? Что называют точкой перегиба графика функции? Как найти такие точки? Сформулируйте достаточные признаки выпуклости и вогнутости кривой на заданном отрезке.

7. Что называется асимптотой кривой? Какие виды асимптот вы знаете? Как определить уравнение наклонной асимптоты?

Практическое занятие

Тема: Вычисление интегралов методом подстановки, по частям.

Цель: отработать навыки в применении метода подстановки и по частям.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Технически метод замены переменной в неопределенном интеграле реализуется двумя способами:

– Подведение функции под знак дифференциала.

– Собственно замена переменной.

Подведение функции под знак дифференциала

Пример 1

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \sin(3x+1)dx$$

Смотрим на таблицу интегралов и находим похожую формулу: $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Подводим функцию $(3x+1)$ под знак дифференциала:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$

Раскрывая дифференциал, легко проверить, что:

$$\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3x+1)'dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3+0)dx = \int \sin(3x+1)dx$$

Фактически $\int \sin(3x+1)dx$ и $\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$ – это запись одного и того же.

Но, тем не менее, остался вопрос, а как мы пришли к мысли, что на первом шаге нужно записать наш интеграл именно так: $\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$? Почему так, а не иначе?

Формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$ **(и все другие табличные формулы) справедливы и применимы НЕ ТОЛЬКО для переменной** x**, но и для любого сложного выражения ЛИШЬ БЫ АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ** ($3x+1$ – в нашем примере) **И ВЫРАЖЕНИЕ ПОД ЗНАКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛА БЫЛИ ОДИНАКОВЫМИ.**

Поэтому мысленное рассуждение при решении должно складываться примерно так: « $\int \sin(3x+1)dx$.в таблице формул $\int \sin x dx = -\cos x + C$. получить $(3x+1)$ и под знаком дифференциала, $d(3x+1)$, тогда $d(3x+1) = (3x+1)'dx = 3dx$. Но в исходном интеграле $\int \sin(3x+1)dx$ множителя-тройки нет, поэтому, чтобы подынтегральная функция не изменилась, мне надо ее домножить на $\frac{1}{3}$ ». В ходе примерно таких мысленных рассуждений и рождается запись:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$

Теперь можно пользоваться табличной формулой $\int \sin x dx = -\cos x + C$:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \textit{ где } C = const$$

Готово

Единственное отличие, у нас не буква «икс», а сложное выражение $3x+1$.

Выполним проверку. Открываем таблицу производных и дифференцируем ответ:

$$\left(-\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C\right)' = -\frac{1}{3}(\cos(3x+1))' + (C)' =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-\sin(3x+1))\cdot(3x+1)' + 0 = \frac{1}{3}\sin(3x+1)\cdot(3+0) = \sin(3x+1)$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Обратите внимание, что в ходе проверки мы использовали правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$. **По сути дела подведение функции под знак дифференциала и $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ – это два взаимно обратных правила.**

Пример 2

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \frac{dx}{5-2x}$$

Анализируем подынтегральную функцию. Здесь у нас дробь, причем в знаменателе линейная функция (с «иксом» в первой степени). Смотрим в таблицу интегралов и находим наиболее похожий: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Подводим функцию $5-2x$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x}$$

Те, кому трудно сразу сообразить, на какую дробь нужно домножать, могут быстренько на черновике раскрыть дифференциал: $d(5-2x) = (5-2x)'dx = (0-2)dx = -2dx$. Получается $-2dx$, значит, чтобы ничего не изменилось, мне надо домножить интеграл на $-\frac{1}{2}$. Далее используем табличную формулу $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$:

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C\right)' = -\frac{1}{2}(\ln|5-2x|)' + (C)' =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(5-2x)} \cdot (5-2x)' + 0 = -\frac{1}{2(5-2x)} \cdot (0-2) = \frac{1}{(5-2x)}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Пример 3

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \cos\frac{x}{2}dx$$

<u>Пример 4</u>

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int 4^{5x}dx$$

$$\int e^{7-x}dx = -\int e^{7-x}d(7-x) = -e^{7-x} + C, \text{где } C = const$$

$$\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^5 d(2x+1) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2x+1)^6 + C = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C, \text{где } C = const$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{5}} = 5\int \frac{d\left(\frac{x}{5}\right)}{\cos^2\frac{x}{5}} = 5tg\frac{x}{5} + C, \text{где } C = const$$

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2} =$$
$$= \frac{1}{3}arctg(3x) + C, \text{где } C = const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2^2-(\sqrt{2}x)^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + C, \text{где } C = const$$

И так далее.

$$\int \frac{dx}{x+3}$$

Решение должно выглядеть так:

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C, \text{где } C = const$$

Как видите, подведение функции $x+3$ под знак дифференциала, без всяких домножений. Поэтому на практике таким длинным решением часто пренебрегают и сразу записывают, что $\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$.

Интеграл $\int \frac{dx}{x+3}$ в таблице нет.

Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Переходим к рассмотрению общего случая – метода замены переменных в неопределенном интеграле.

Пример 5

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin(3x+1)dx$$

табличная формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

Идея метода замены состоит в том, чтобы **сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой.**

В данном случае напрашивается: $t = 3x+1$

Вторая по популярности буква для замены – это буква z.

В принципе, можно использовать и другие буквы, но мы всё-таки будем придерживаться традиций.

$$\int \sin(\underbrace{3x+1}_{=\,t})dx$$

Осуществляется переход к новой переменной t, то в новом интеграле всё должно быть выражено через букву t, и дифференциалу dx там совсем не место.

Следует логичный вывод, что dx нужно **превратить в некоторое выражение, которое зависит только от t.**

Действие следующее. После того, как мы подобрали замену, в данном примере, $t = 3x+1$, нам нужно найти дифференциал dt. С дифференциалами, думаю, дружба уже у всех налажена.

Так как $t = 3x+1$, то

$$dt = d(3x+1) = (3x+1)'dx = 3dx$$

После разборок с дифференциалом окончательный результат рекомендую переписать максимально коротко: $dt = 3dx$

Теперь по правилам пропорции выражаем нужный нам dx:

$dx = \frac{dt}{3}$

$$\int \sin(\underbrace{3x+1}_{t})\underbrace{dx}_{\frac{dt}{3}}$$

В итоге:

Таким образом:

$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt$

А это уже самый что ни на есть табличный интеграл $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (таблица, интегралов, естественно, справедлива и для переменной t).

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C$$

В заключении осталось провести обратную замену. Вспоминаем, что $t = 3x+1$.

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \stackrel{t=3x+1}{=}$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C,\ где\ C = const$$

$\int \sin(3x+1)dx = (*)$

Проведем замену: $t = 3x+1$

$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

$$(*) = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \stackrel{t=3x+1}{=}$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C,\ где\ C = const$$

Значок $(*)$ не несет никакого математического смысла, он обозначает, что мы прервали решение для промежуточных объяснений.

Также всем рекомендую использовать математический знак $\Rightarrow$ вместо фразы «из этого следует это». И коротко, и удобно.

При оформлении примера в тетради надстрочную пометку $\overset{t=3x+1}{}$ обратной замены лучше выполнять простым карандашом.

Внимание! В следующих примерах нахождение дифференциала dt расписываться подробно не будет.

А теперь самое время вспомнить первый способ решения:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \textit{ где } C = const$$

В чем разница? Принципиальной разницы нет. Это фактически одно и то же. **Но с точки зрения оформления задания метод подведения функции под знак дифференциала – гораздо короче.**

<u>Пример 6</u>

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = (*)$$

Проведем замену: $t = 3-4x$

$$dt = -4dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{4}$$

$$(*) = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C \overset{t=3-4x}{=} =$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{3-4x} + C, \textit{ где } C = const$$

Как видите, в результате замены исходный интеграл значительно упростился – свёлся к обычной степенной функции. **Это и есть цель замены – упростить интеграл**.

подведения функции под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = -\frac{1}{4}\int (3-4x)^{-\frac{2}{3}}d(3-4x) = -\frac{1}{4}\cdot 3\cdot (3-4x)^{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3\cdot\sqrt[3]{3-4x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

<u>Пример 7</u>

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \sqrt[5]{(1+x)^4}\,dx$$

Это пример для самостоятельного решения.

Пример 8

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{xdx}{(3x+2)^7} = (*)$$

Замена: $t = 3x+2$

Осталось выяснить, во что превратится xdx

$$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Хорошо, dx мы выразили, но что делать с оставшимся в числителе «иксом»?!

Время от времени в ходе решения интегралов встречается следующий трюк: x мы выразим из той же замены $t = 3x+2$!

$$t = 3x+2 \Rightarrow 3x = t-2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$(*) = \int \frac{\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{dt}{3}}{t^7} = \frac{1}{9}\int \frac{(t-2)dt}{t^7} = \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^7}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int\left(t^{-6} - 2t^{-7}\right)dt = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(-5)}t^{-5} - 2\cdot\frac{1}{(-6)}t^{-6}\right) \overset{t=3x+2}{=} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5(3x+2)^5} + \frac{1}{3(3x+2)^6}\right) + C, \text{ где } C = const$$

Пример 9

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x(1-x)^5 dx$$

Это пример для самостоятельного решения.

Пример 10

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1}$$

Настало время рассказать об основной предпосылке использования метода замены переменной: **в подынтегральном выражении должна находиться некоторая функция** $\varphi(x)$ **и её производная** $\varphi'(x)$ **:** $\int \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx$ (функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ могут быть и не в произведении)

В этой связи при нахождении интегралов довольно часто приходится заглядывать в таблицу производных.

В рассматриваемом примере замечаем, что степень числителя на единицу меньше степени знаменателя. В таблице производных находим формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, которая как раз понижает степень на единицу. А, значит, если обозначить за t знаменатель, то велики шансы, что числитель xdx превратится во что-нибудь хорошее.

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = (*)$$

Замена: $t = 4x^2 + 1 \Rightarrow dt = 8xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{dt}{8}$

$$(*) = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C \overset{t=4x^2+1}{=} \frac{1}{8}\ln\left|4x^2+1\right| + C, \text{ где } C = const$$

Кстати, здесь не так сложно подвести функцию под знак дифференциала:

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = \frac{1}{8}\int \frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1} = \frac{1}{8}\ln\left|4x^2+1\right| + C, \text{ где } C = const$$

Следует отметить, что для дробей вроде $\int \dfrac{xdx}{4x^2+2x+1}$, $\int \dfrac{(x-3)dx}{4x^2+1}$ такой фокус уже не пройдет (точнее говоря, применить нужно будет не только прием замены). Интегрировать некоторые дроби можно научиться на уроке Интегрирование некоторых дробей.

Пример 11

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$$

Пример 12

Найти неопределенный интеграл.

$\int e^{2x^3-1} \cdot x^2 dx$

Пример 13

Найти неопределенный интеграл.

$\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = (*)$

Смотрим в таблицу производных и находим наш арккосинус: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. У нас в подынтегральном выражении находится арккосинус и нечто похожее на его производную.

Общее правило:

За t обозначаем саму функцию (а не её производную).

В данном случае: $t = \arccos 3x$. Осталось выяснить, во что превратится оставшаяся часть подынтегрального выражения $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

В этом примере нахождение dt я распишу подробно поскольку $\arccos 3x$ – сложная функция.

$$dt = d(\arccos 3x) = (\arccos 3x)'dx = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot (3x)'dx = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

Или короче: $dt = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

По правилу пропорции выражаем нужный нам остаток: $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{dt}{3}$

Таким образом:

$$(*) = -\frac{1}{3}\int t dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} t^2 + C \overset{t=\arccos 3x}{=} -\frac{\arccos^2 3x}{6} + C, \text{ где } C = const$$

Вот здесь подвести функцию под знак дифференциала уже не так-то просто.

Пример 14

Найти неопределенный интеграл.

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1} dx$

Метод интегрирования по частям – это один из краеугольных камней интегрального исчисления.

Какую задачу решает метод интегрирования по частям? Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, **произведение** функций, а в ряде случаев – и частное. Как мы помним, нет удобной формулы: $\cancel{\int uv\,dx = \int u\,dx \cdot \int v\,dx}$. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ – формула интегрирования по частям .

И сразу список в студию. По частям берутся интегралы следующих видов:

1) $\int \ln x\,dx$, $\int (x^2+3)\ln x\,dx$, $\int x\ln^2 x\,dx$ – логарифм, логарифм, умноженный на какой-нибудь многочлен.

2) $\int xe^x dx$, $\int (x^2-2x+5)e^{-2x}dx$ – экспоненциальная функция, умноженная на какой-нибудь многочлен. Сюда же можно отнести интегралы $\int x\cdot 4^x dx$ – показательная функция, умноженная на многочлен,

3) $\int x\cos 6x\,dx$, $\int (x^2+3x)\sin 2x\,dx$, $\int x\,tg^2 x\,dx$ – тригонометрические функции, умноженные на какой-нибудь многочлен.

4) $\int \arcsin x\,dx$, $\int x^2 arctg x\,dx$ – обратные тригонометрические функции («арки»), «арки», умноженные на какой-нибудь многочлен.

Интегралы от логарифмов

Пример 1

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \ln x\,dx$$

Потому что рассматриваемый интеграл отнюдь не табличный – он берётся по частям. Решаем:

$$\int \ln x\,dx = (*)$$

Прерываем решение на промежуточные объяснения.

Используем формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

Формула применяется слева направо

Смотрим на левую часть: $\int u dv$. Очевидно, что в нашем примере $\int \ln x dx$ (и во всех остальных, которые мы рассмотрим) что-то нужно обозначить за u, а что-то за dv.

В интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается логарифм.

Технически оформление решения реализуется следующим образом, в столбик записываем:

$$u = \ln x$$
$$dv = dx$$

То есть, за u мы обозначили логарифм, а за dv – **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du:

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx$$

Теперь находим функцию v. Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать **правую часть** нижнего равенства $dv = dx$:

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

Теперь открываем наше решение и конструируем правую часть формулы: $uv - \int v du$.

Вот кстати, и образец чистового решения с небольшими пометками:

$$\int \ln x dx = (*)$$

Интегрируем по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

$$(*) = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C, \text{ где } C = const$$

Единственный момент, в произведении uv я сразу переставил местами u и v, так как множитель x принято записывать перед логарифмом.

Как видите, применение формулы интегрирования по частям, по сути дела, свело наше решение к двум простым интегралам.

Обратите внимание, что в ряде случаев **сразу после** применения формулы, под оставшимся интегралом обязательно проводится упрощение – в рассматриваемом примере мы сократили подынтегральное выражение на «икс».

Выполним проверку. Для этого нужно взять производную от ответа:

$$(x\ln x - x + C)' = (x\ln x)' - (x)' + (C)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1 + 0 =$$

$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл решён правильно.

В ходе проверки мы использовали правило дифференцирования произведения: $(uv)' = u'v + uv'$. И это не случайно.

Формула интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$ **и формула** $(uv)' = u'v + uv'$ **– это два взаимно обратных правила.**

<u>Пример 2</u>

Найти неопределенный интеграл.

$$\int x \ln^2 x dx$$

Подынтегральная функция представляет собой произведение логарифма на многочлен.

Решаем.

$$\int x\ln^2 xdx = (*)$$

Как уже говорилось, за u необходимо обозначить логарифм (то, что он в степени – значения не имеет). За dv обозначаем **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Записываем в столбик:

$u = \ln^2 x$
$dv = xdx$

Сначала находим дифференциал du:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)'dx = 2\ln x \cdot (\ln x)'dx = \frac{2\ln xdx}{x}$$
$$dv = xdx$$

Здесь использовано правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Теперь находим функцию v, для этого интегрируем **правую часть** нижнего равенства $dv = xdx$:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)'dx = 2\ln x \cdot (\ln x)'dx = \frac{2\ln xdx}{x}$$
$$dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Для интегрирования мы применили простейшую табличную формулу $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Теперь всё готово для применения формулы $\int udv = uv - \int vdu$. Открываем «звёздочкой» и «конструируем» решение в соответствии с правой частью $uv - \int vdu$:

$$(*) = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\ln xdx}{x}\right) = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln xdx = (*)$$

Под интегралом у нас снова многочлен на логарифм! Поэтому решение опять прерывается и правило интегрирования по частям применяется второй раз. Не забываем, что за u в похожих ситуациях всегда обозначается логарифм.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \int\left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}\right)\right) \overset{(2)}{=} \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{2}\int xdx \overset{(3)}{=}$$
$$= \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \overset{(4)}{=} \frac{x^2 (2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{4} + C,\ C = const$$

(1) Не путаемся в знаках! Очень часто здесь теряют минус, также обратите внимание, что минус относится **ко всей** скобке $\left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \int\left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}\right)\right)$, и эти скобки нужно корректно раскрыть.

(2) Раскрываем скобки. Последний интеграл упрощаем.

(3) Берем последний интеграл.

(4) «Причесываем» ответ.

Необходимость дважды (а то и трижды) применять правило интегрирования по частям возникает не так уж и редко.

А сейчас пара примеров для самостоятельного решения:

Пример 3

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\ln xdx}{x}$$

Этот пример решается методом замены переменной (или подведением под знак дифференциала)!

Пример 4

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\ln xdx}{x^2}$$

А вот этот интеграл интегрируется по частям (обещанная дробь).

Интегралы от экспоненты, умноженной на многочлен

Общее правило: **за u всегда обозначается многочлен**

Пример 5

Найти неопределенный интеграл.

$\int (x-2)e^{2x}dx$

Решение:

$\int (x-2)e^{2x}dx = (*)$

Используя знакомый алгоритм, интегрируем по частям:

$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)'dx = dx$

$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int udv = uv - \int vdu$

$$(*) = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Если возникли трудности с интегралом $\int e^{2x}dx$, то следует вернуться к статье Метод замены переменной в неопределенном интеграле.

Единственное, что еще можно сделать, это «причесать» ответ:

$$\frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{2(x-2)e^{2x} - e^{2x}}{4} + C =$$

$$= \frac{(2x-4-1)e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-5)e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Но если Ваша техника вычислений не очень хороша, то самый выгодный вариант оставить ответом $\frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$ или даже $\frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C, \text{ где } C = const$

То есть, пример считается решенным, когда взят последний интеграл. Ошибкой не будет, другое дело, что преподаватель может попросить упростить ответ.

Пример 6

Найти неопределенный интеграл.

$\int (x^2 + x)e^{-x}dx$

Это пример для самостоятельного решения. Данный интеграл дважды интегрируется по частям. Особое внимание следует обратить на знаки – здесь легко в них запутаться, также помним, что e^{-x} – сложная функция.

Больше про экспоненту рассказывать особо нечего. Могу только добавить, что экспонента и натуральный логарифм взаимно-обратные функции, это я к теме занимательных графиков высшей математики =) Стоп-стоп, не волнуемся, лектор трезв.

Интегралы от тригонометрических функций, умноженных на многочлен

Общее правило**:** за u всегда обозначается многочлен

Пример 7

Найти неопределенный интеграл.

$\int x\cos 6x dx = (*)$

Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos 6x dx \Rightarrow v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\sin 6x$

$\int u dv = uv - \int v du$

$$(*) = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x dx = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C, \text{ где } C = const$$

Хммм, …и комментировать нечего.

Пример 8

Найти неопределенный интеграл

$\int (x-6)\sin\frac{x}{2}dx$

Это пример для самостоятельного решения

Пример 9

Найти неопределенный интеграл

$\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Еще один пример с дробью. Как и в двух предыдущих примерах за u обозначается многочлен.

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -xctgx + \int ctgxdx = -xctgx + \int \frac{\cos xdx}{\sin x} =$$

$$= -xctgx + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -xctgx + \ln|\sin x| + C, \text{ где } C = const$$

Если возникли трудности или недопонимание с нахождением интеграла $\int ctgxdx$, то рекомендую посетить урок **[Интегралы от тригонометрических функций](#)**.

Пример 10

Найти неопределенный интеграл

$$\int x \sin x \cos xdx$$

Это пример для самостоятельного решения.

Подсказка: перед использованием метода интегрирования по частям следует применить некоторую тригонометрическую формулу, которая превращает произведение двух тригонометрических функций в одну функцию. Формулу также можно использовать и в ходе применения метода интегрирования по частям, кому как удобнее.

Интегралы от обратных тригонометрических функций.

Интегралы от обратных тригонометрических функций, умноженных на многочлен

Общее правило: **за u всегда обозначается обратная тригонометрическая функция**.

Напоминаю, что к обратным тригонометрическим функциям относятся арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс. Для краткости записи я буду называть их «арками»

Пример 11

Найти неопределенный интеграл.

$$\int arctg2xdx$$

Решаем.

$$\int arctg2xdx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = arctg2x \Rightarrow du = (arctg2x)'dx = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)'dx = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = xarctg2x - 2\int \frac{xdx}{1+4x^2} = xarctg2x - \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} =$$

$$= xarctg2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C, \text{ где } C = const$$

Интеграл $\int \frac{2xdx}{1+4x^2}$ найден методом подведения функции под знак дифференциала, можно использовать и метод замены в «классическом» виде. Аналогичный пример мы разбирали на уроке **Метод замены переменной в неопределенном интеграле**.

Таким образом, помимо «чистого» интегрирования по частям нередко требуется применять и другие методы, приёмы решения.

Пример 12

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \arcsin 3xdx$$

Это пример для самостоятельного решения

Пример 13

Найти неопределенный интеграл.

$$\int xarctgxdx$$

Решения и ответы:

Пример 3: ***Решение***:

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C,\ C = const$$

Пример 4: ***Решение***:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{(\ln x + 1)}{x} + C,\ C = const$$

Пример 6: ***Решение***:

$$\int (x^2 + x) e^{-x} dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 + x \Rightarrow du = (2x+1)dx$$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -e^{-x}(x^2 + x) + \int (2x+1)e^{-x} dx = (*)$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx$$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$(*) = -e^{-x}(x^2 + x) - e^{-x}(2x+1) + 2\int e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + x) - e^{-x}(2x+1) - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + x + 2x + 1 + 2) + C =$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 3x + 3) + C, \text{ где } C = const$$

Пример 8: ***Решение***:

$$\int (x - 6)\sin\frac{x}{2} dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x - 6 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 2\int\cos\frac{x}{2}dx = -2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 2\cdot 2\int\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= -2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C, \text{ где } C = const$$

Пример 10: ***Решение:***

$$\int x\sin x\cos x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\sin 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\int\sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int\cos 2x dx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C, \text{ где } C = const$$

Примечание: Здесь мы использовали известную тригонометрическую формулу двойного угла $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$*. Её можно было использовать и сразу:* $\int x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx = (*)$*, а потом интегрировать по частям.*

Похожим способом также решаются интегралы вроде $\int x\sin^2 x dx$*,* $\int x\cos^2 x dx$ *– в них необходимо (сразу или в ходе решения) понизить степень синуса (косинуса) с помощью соответствующих формул. Более подробно – см.* ***Интегралы от тригонометрических функций***.

Пример 12: ***Решение:***

$$\int\arcsin 3x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \arcsin 3x \Rightarrow du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = x\arcsin 3x - \int\frac{3x dx}{\sqrt{1-9x^2}} = x\arcsin 3x + \int\frac{\frac{1}{6}d(1-9x^2)}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= x\arcsin 3x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C, \text{ где } C = const$$

Пример 13: ***Решение***:

$$\int x\,arctgx\,dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = arctgx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - \int \frac{(1+x^2-1)dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - x + arctgx\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)arctgx - x\right) + C, \text{ где } C = const$$

Задание к работе:

Вариант 1

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^1 (5x-2)^4\,dx.$ 2. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos\left(x^2\right)dx.$ 4. $\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$ 5. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$

Вариант 2

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^1 e^{2x}dx.$ 2. $\int_0^3 \frac{dx}{4x+2}.$ 3. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 4. $\int_\pi^{2\pi} x^2 \sin x dx.$ 5. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}.$

Вариант 3

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод непосредственного интегрирования или метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+4x^2}.$ 2. $\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)dx.$ 3. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}.$ 4. $\int_1^2 x^2e^xdx.$ 5. $\int_2^5 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx.$

Вариант 4

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ 2. $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx.$ 3. $\int_0^{1/2} .\frac{arctg2x}{1+4x^2}dx.$ 4. $\int_\pi^{2\pi} x^2\cos x dx.$ 5. $\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

Вариант 5

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1. \int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$ $\quad 2. \int_{0}^{\pi/3} tgxdx.$ $\quad 3. \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin xdx.$ $\quad 4. \int_{0}^{1} arctgxdx.$ $\quad 5. \int_{0}^{2} \sqrt{4-x}\, dx.$

Вариант 6

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод непосредственного интегрирования или метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1. \int_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}.$ $\quad 2. \int_{0}^{1} 2^x dx.$ $\quad 3. \int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{1+x^4}.$ $\quad 4. \int_{0}^{2\pi} x^2 \cos xdx.$ $\quad 5. \int_{2}^{9} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

Вариант 7

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1. \int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$ $\quad 2. \int_{0}^{\pi/2} \sin 5xdx.$ $\quad 3. \int_{0}^{\sqrt{\pi/2}} x \sin\left(x^2\right) dx.$ $\quad 4. \int_{0}^{\pi/2} \left(x^2+1\right) \sin xdx.$ $\quad 5. \int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx.$

Вариант 8

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод непосредственного интегрирования или метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1. \int_{0}^{1} (2x-7)^2 dx.$ $\quad 2. \int_{0}^{3} \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right) dx.$ $\quad 3. \int_{0}^{1} xe^{x^2} dx.$ $\quad 4. \int_{0}^{1} .\, x \cdot arctgxdx$ $\quad 5. \int_{0}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}.$

Вариант 9

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1. \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 xdx.$ $\quad 2. \int_{2}^{3} \frac{dx}{4x^2-1}.$ $\quad 3. \int_{e}^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$ $\quad 4. \int_{0}^{2\pi} x^2 \sin xdx.$ $\quad 5. \int_{3}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{x-2}}.$

Вариант 10

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1. \int_{0}^{1} (4x-5)^4 dx.$ $\quad 2. \int_{0}^{\pi/2} \sin\frac{x}{2} dx.$ $\quad 3. \int_{0}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx.$ $\quad 4. \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \cos xdx.$ $\quad 5. \int_{2}^{3} x\sqrt{x-2}\, dx.$

Вариант 11

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^1 e^{-3x}dx. \quad 2.\int_1^e \frac{dx}{(5x-1)}. \quad 3.\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos xdx. \quad 4.\int_1^2 x^3\ln xdx. \quad 5.\int_2^{17} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$$

Вариант 12

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}. \quad 2.\int_2^6 \sqrt{x-2}dx. \quad 3.\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^8}. \quad 4.\int_{\pi/2}^{\pi} x^2\sin xdx. \quad 5.\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}.$$

Вариант 13

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^{\pi/3} tgxdx. \quad 2.\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}. \quad 3.\int_e^{e^2} \frac{\ln xdx}{x}. \quad 4.\int_{\pi/2}^{\pi} \left(x^2+2\right)e^xdx. \quad 5.\int_0^8 \sqrt{64-x^2}\,dx.$$

Вариант 14

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

.

$$1.\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}. \quad 2.\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}. \quad 3.\int_0^{\cos 1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \quad 4.\int_{-1}^0 arctgxdx. \quad 5.\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Вариант 15

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_{-\pi/2}^0 \sin\frac{x}{3}dx. \quad 2.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}. \quad 3.\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3dx. \quad 4.\int_0^{\pi/2} x^2\cos xdx. \quad 5.\int_1^2 x^2\sqrt{x-1}\,dx.$$

Вариант 16

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^{\pi/2} \cos^2 xdx. \quad 2.\int_0^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}. \quad 3.\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \quad 4.\int_0^1 \left(x^2+3\right)e^xdx. \quad 5.\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx.$$

Вариант 17

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x dx.$ 2. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$ 3. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx.$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$ 5. $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{100 - x^2}\, dx.$

Вариант 18

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+9x^2}.$ 2. $\int\limits_{1}^{2} \left(x^4 - 3x + 1\right) dx.$ 3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$ 4. $\int\limits_{0}^{1} \ln\left(1+x^2\right) dx.$ 5. $\int\limits_{-3}^{1} x\sqrt{x+3} dx.$

Вариант 19

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{3x-5}.$ 2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(x^2+2\right) \cos x dx.$ 5. $\int\limits_{3}^{7} x\sqrt{x-3} dx.$

Вариант 20

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 2t \cdot dt.$ 2. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$ 3. $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos x dx.$ 5. $\int\limits_{-2}^{2} x\sqrt{x+2} dx.$

Вариант 21

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\left(x-1\right)^3}.$ 2. $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/24} tg 6x.$ 3. $\int\limits_{0}^{1} x^2 \left(x^3 - 1\right)^4 dx.$ 4. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x \cdot arctg x dx.$ 5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} dx.$

Вариант 22

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

1. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^2 2x dx.$ 2. $\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ 3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{x^3 - 7}.$ 4. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x dx.$ 5. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

Вариант 23

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^1 (3x-2)^4\,dx. \quad 2.\int_0^{\pi/2} \sin 5x dx. \quad 3.\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos\left(x^2\right)dx. \quad 4.\int_1^2 (x+2)\ln x dx. \quad 5.\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$$

Вариант 24

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^1 e^{3x}dx. \quad 2.\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}. \quad 3.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}. \quad 4.\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\sin x dx. \quad 5.\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{3+4x}}.$$

Вариант 25

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2}. \quad 2.\int_1^2 \left(x^2-3x+2\right)dx. \quad 3.\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^4}. \quad 4.\int_1^2 x^2e^x dx. \quad 5.\int_2^5 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Вариант 26

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}dx \quad 2.\int_2^6 \sqrt{x-1}dx. \quad 3.\int_0^{1/2} .\frac{arctg 2x}{1+4x^2}dx. \quad 4.\int_{\pi}^{2\pi} x^2\cos x dx. \quad 5.\int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-2}}.$$

Вариант 27

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

.

$$1.\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}. \quad 2.\int_0^{\pi/3} tgx dx. \quad 3.\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x\sin x dx. \quad 4.\int_0^1 arctgx dx. \quad 5.\int_0^2 \sqrt{4-x}\,dx.$$

Вариант 28

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$$1.\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}. \quad 2.\int_0^1 2^x dx. \quad 3.\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^4}. \quad 4.\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx. \quad 5.\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Вариант 29

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1.\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.\qquad 2.\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 5x dx.\qquad 3.\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi/2}} x\sin\left(x^2\right)dx.\qquad 4.\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(x^2+1\right)\sin x dx.\qquad 5.\int\limits_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx.$

Вариант 30

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-3, 5 – метод непосредственного интегрирования и метод подстановки, в 4 – метод интегрирования по частям.

$1.\int\limits_{0}^{1} \left(2x-7\right)^2 dx.\qquad 2.\int\limits_{0}^{3} \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx.\qquad 3.\int\limits_{0}^{1} xe^{x^2} dx.\qquad 4.\int\limits_{0}^{1}. xarctgxdx\qquad 5.\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}.$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
2. Укажите, каковы отличия первообразного и неопределенного интеграла?
3. Пусть на некотором промежутке существует интеграл $\int\left|f(x)\right|dx$. Можно ли утверждать, что существует интеграл $\int f(x)\,dx$?

Практическое занятие

Тема: Вычисление неопределенных и определенных интегралов методом подстановки и по частям.

***Цель*:** отработать навыки в вычислении интегралов.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3x-1}$.

Решение. Применим способ внесения выражения под знак дифференциала: $\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$.

1.2. $\int \frac{2xdx}{x+3}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{2xdx}{x+3} = 2\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = 2\int \left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx = 2\left(\int dx - 3\int \frac{dx}{x+3}\right) = 2x - 3\ln|x+3| + C.$$

1.3. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

Сведём данный интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{2-3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right| + C.$$

1.4. $\int \frac{\ln xdx}{x}$;

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{\ln xdx}{x} = \begin{bmatrix} \ln x = t, \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int\frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}=\begin{bmatrix}t=1-2x^2,\\ dt=-4xdx\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-2x^2}+C.$$

1.6. $\int\frac{dx}{x^2-2x+4}$.

Решение. Введём подстановку $t=x-1, x=t+1, dt=dx$. Получим:

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int\frac{dt}{(t+1)^2-2(t+1)+4}=\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1.7. $\int x\,arctg\,x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям: $\int udv=uv-\int vdu$. В данном случае: $u=arctg\,x, dv=x\,dx, du=\frac{dx}{1+x^2}, v=\frac{x^2}{2}$. Подставляя эти выражения в формулу, получим:

$$I=\frac{x^2}{2}arctg\,x-\int\frac{x^2}{2(1+x^2)}dx=\frac{x^2}{2}arctg\,x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}arctg\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}arctg\,x+C.$$

1.8. $\int x^4\cdot\sqrt[4]{1-3x^5}\,dx$.

Решение. Введем подстановку $t=1-3x^5$, откуда $dt=-15x^4dx$. Тогда $I=-\frac{1}{15}\int\sqrt[4]{t}dt$. Находим полученный табличный интеграл и возвращаемся к прежней переменной:

$$I=-\frac{1}{15}\int t^{\frac{1}{4}}dt=-\frac{1}{15}\cdot\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+C=-\frac{4}{75}\sqrt[4]{t^5}+C=-\frac{4}{75}\sqrt[4]{(1-3x^5)^5}+C.$$

1.9. $\int\sin^3 xdx$;

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$\int\sin^3 xdx=\int\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$. Введём подстановку $\cos x=t$, тогда $dt=-\sin xdx$ и получим: $-\int(1-t^2)dt=-t+\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$.

1.10. $\int\cos^4 x\sin^3 dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int\cos^4 x\sin^3 x\,dx=\int\cos^4 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=\int\cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(\cos^4 x-\cos^6 x)\sin xdx$$

Введём подстановку $\cos x=t$, тогда $dt=-\sin xdx$. Получим:

$$-\int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x}$.

Решение. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2 - 2x} = F(4) - F(3) = \int\limits_3^4 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$

. 2.2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5x + \sin x)dx = \left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{5} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}.$$

2.3. $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Задание к работе:

Вариант № 1.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{1 + 7x}$; 1.2. $\int \frac{xdx}{2x - 4}$; 1.3. $\int \frac{dx}{3 - 4x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x \ln x}$; 1.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$; 1.7. $\int \ln^2 x$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$; 1.9. $\int \sin^3 2x dx$; 1.10. $\int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2 + 2x}$; 2.2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos 2x dx$; 2.3. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - \cos^2 x} dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Вариант № 2.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{6-2x}$; 1.2. $\int \frac{xdx}{5x-1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{1-4x^2}$; 1.4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 1.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$; 1.7. $\int x\ln^2 xdx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-6}}$; 1.9. $\int \sin^4 2xdx$; 1.10. $\int \cos^3 x\sqrt[3]{\sin^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x+1}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cos 2xdx$; 2.3. $\int_0^1 \sqrt{4-\sin^2 x}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}.$$

Вариант № 3.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3x+7}$; 1.2. $\int \frac{2xdx}{x+5}$; 1.3. $\int \frac{dx}{6-2x^2}$; 1.4. $\int \frac{arctgx\,dx}{1+x^2}$; 1.5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x^3}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$; 1.7. $\int x\ln x$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+1}}$; 1.9. $\int \cos^4 2xdx$; 1.10. $\int \cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos x\,dx$; 2.3. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-\cos^2 x}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2}.$$

Вариант № 4.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3-8x}$; 1.2. $\int \frac{3xdx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{2-5x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 1.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x^2}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$; 1.7. $\int x^2 \ln x\,dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-1}}$; 1.9. $\int \cos^3 3xdx$; 1.10. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-7x+12}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2xdx$; 2.3. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-\sin^2 x}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^e x\ln xdx.$$

Вариант № 5.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{2-3x}$; 1.2. $\int \frac{3xdx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{4-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; 1.5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2+5x^3}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 1.7. $\int xe^x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; 1.9. $\int \sin^5 xdx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}$; 2.2. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cos 2xdx$; 2.3. $\int_0^2 \sqrt{4-\cos^2 x}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Вариант № 6.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (3-2x)^3 dx$; 1.2. $\int \frac{x^2 dx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{xdx}{4-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{(2+\ln x)\,dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{x^2 dx}{5x^3-1}$;

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$; 1.7. $\int x^2 e^x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 1.9. $\int tg^2 x\,dx$; 1.10. $\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int\limits_1^e \ln x\,dx$; 2.3. $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{x^5}\,dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{x^3+1}.$$

Вариант № 7.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (2-x)^3 dx$; 1.2. $\int \frac{2x^2 dx}{x+1}$; 1.3. $\int \frac{2xdx}{4-x^2}$; 1.4. $\int \frac{(1+\ln x)\,dx}{2x}$; 1.5. $\int \frac{x^2 dx}{4x^6-1}$;

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; 1.7. $\int x^2 \cos x\,dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; 1.9. $\int tg^2 x\,dx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; 2.3. $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{x^7}\,dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^3}}.$$

Вариант № 8.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (2+4x)^4 dx$; 1.2. $\int \frac{3x^2 dx}{2x-3}$; 1.3. $\int \frac{3x dx}{1-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{(1+\ln 2x)\, dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{x^3 dx}{2x^8+1}$;

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$; 1.7. $\int x\cos x\, dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 1.9. $\int ctg^2 x\, dx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int\limits_{1}^{e} \ln(x+1)\, dx$; 2.3. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt[4]{x^5}\, dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

Вариант № 9.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (5+2x)^5 dx$; 1.2. $\int \frac{2x^2 dx}{3x-4}$; 1.3. $\int \frac{3x dx}{6-x^2}$; 1.4. $\int \frac{(2-\ln x)\, dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{2x^2 dx}{9x^3+1}$;

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 1.7. $\int x^2 \sin x\, dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x+1}}$; 1.9. $\int tg^4 x\, dx$; 1.10. $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2.2. $\int\limits_{1}^{e} \ln(2x-1)\, dx$; 2.3. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[6]{x^5}\, dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_{2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2-8}.$$

Вариант № 10.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int (7-2x)^6 dx$; 1.2. $\int \frac{4x^2 dx}{x-4}$; 1.3. $\int \frac{5x dx}{2-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{(2+\ln^2 x)\, dx}{x}$; 1.5. $\int \frac{3x^2 dx}{2x^6-1}$;

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; 1.7. $\int x^2 \sin x\,dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$; 1.9. $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2.2. $\int\limits_1^e \ln x^2\,dx$; 2.3. $\int\limits_0^1 \sqrt[7]{x^5}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-3}.$$

Вариант № 11.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{1+7x}$; 1.2. $\int \frac{xdx}{2x-4}$; 1.3. $\int \frac{dx}{3-4x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 1.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$; 1.7. $\int \ln^2 xdx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 1.9. $\int \sin^3 2xdx$; 1.10. $\int \cos^5 x\sqrt[3]{\sin^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int\limits_1^e \ln x\,dx$; 2.3. $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{x^5}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Вариант № 12.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{6-2x}$; 1.2. $\int \frac{xdx}{5x-1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{1-4x^2}$; 1.4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 1.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$; 1.7. $\int x\ln^2 x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-6}}$; 1.9. $\int \sin^4 2x dx$; 1.10. $\int \cos^3 x\sqrt[3]{\sin^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; 2.3. $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{x^7}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}.$$

Вариант № 13.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3x+7}$; 1.2. $\int \frac{2xdx}{x+5}$; 1.3. $\int \frac{dx}{6-2x^2}$; 1.4. $\int \frac{arctgx\,dx}{1+x^2}$; 1.5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x^3}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$; 1.7. $\int x\ln x$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+1}}$; 1.9. $\int \cos^4 2xdx$; 1.10. $\int \cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2.2. $\int\limits_1^e \ln x^2\,dx$; 2.3. $\int\limits_0^1 \sqrt[7]{x^5}dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3-x^2}.$$

Вариант № 14.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3-8x}$; 1.2. $\int \frac{3xdx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{2-5x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 1.5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x^2}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$; 1.7. $\int x^2\ln x\,dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-1}}$; 1.9. $\int \cos^3 3xdx$; 1.10. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos^2 x}dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2.2. $\int\limits_{1}^{e} \ln(x+1)\,dx$; 2.3. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt[4]{x^5}\,dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_{0}^{e} x \ln x dx.$$

Вариант № 15.

Задание 1. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{2-3x}$; 1.2. $\int \frac{3xdx}{2x+1}$; 1.3. $\int \frac{dx}{4-3x^2}$; 1.4. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; 1.5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2+5x^3}}$;

1.6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 1.7. $\int xe^x dx$; 1.8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; 1.9. $\int \sin^5 xdx$; 1.10. $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$.

Задание 2. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2.2. $\int\limits_{1}^{e} \ln(2x-1)\,dx$; 2.3. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[6]{x^5}\,dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется определѐнным интегралом от функции $y f x$ на отрезке a, b ?

2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница. Поясните еѐ смысл.

3. Как вычисляется определѐнный интеграл от выражения

вида $af\ x\ bg\ x$?

4. Чему равен интеграл от чѐтной функции по отрезку a, a ?

5. Чему равен интеграл от нечѐтной функции по отрезку a, a ?

6. В чѐм заключается смысл интегрирования по частям?

7. Запишите формулу замены переменной. В чѐм заключается еѐ смысл?

8.Сформулируйте теорему об оценке определённого интеграла.

Практическое занятие

Тема: Приближенные методы вычисления интегралов.

Цель: научить применять различные методы приближенного вычисления интегралов; проверить на практике знание понятия определённого интеграла, умение вычислять табличные интегралы, умение вычислять определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, знание приближённых методов вычисления определённого интеграла.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы.

Формула Ньютона-Лейбница.

Значение определенного интеграла может быть вычислено по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ = $F(x)\Big|_a^b$, здесь символ $\Big|_a^b$ означает, что из значения $F(x)$ при верхнем пределе b нужно вычесть значение при нижнем пределе a , $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению первообразной, то есть неопределенного интеграла.

ПРИМЕР . Вычисление определенного интеграла.

Методы вычисления определенного интеграла.

Если $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi(t) \in [a, b]$, когда t изменяется на $[\alpha, \beta]$, то, положив $x = \varphi(t)$, получим формулу замены переменной в определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Пусть $u(x), v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула интегрирования по частям $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$. Эта формула применяется для тех же классов функций, что и при вычислении неопределенного интеграла.

Формула замены переменного в определённом интеграле.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a';b']$*, а функция* $\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную* $\varphi'(t)$ *на отрезке* $[\alpha;\beta]$*, причём все значения* $x=\varphi(t)$ *при* $t\in[\alpha;\beta]$ *принадлежат отрезку* $[a';b']$*, в том числе* $\varphi(\alpha)=a$ *и* $\varphi(\beta)=b$*. Тогда имеет место равенство*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Заметим, что доказанная формула, в отличие от формулы замены переменной в неопределённом интеграле, даёт нам возможность после перехода к интегралу от функции новой переменной x не возвращаться к исходному интегралу от функции переменной t. После того, как замена сделана, мы можем "забыть", как выглядел исходный интеграл, и продолжать преобразования интеграла от функции новой переменной. Именно на том, что к старой переменной возвращаться не приходится, мы и получаем экономию усилий при применении формулы замены переменной в определённом интеграле, по сравнению с тем, что получилось бы, если бы мы просто нашли первообразную и применили формулу Ньютона - Лейбница.

Пример 1. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\ dt.$$

Для этого сделаем замену $x = \varphi(t) = \sin t$, откуда $dx = \varphi'(t)dt = \cos t\ dt$. Кроме того, при $t = 0$ имеем $x = \sin 0 = 0$, а при $t = \frac{\pi}{2}$ имеем $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\ dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t\ dt = dx \\ t = 0 \Rightarrow x = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.

Теорема . *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют на отрезке* $[a;b]$ *непрерывные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$. *Тогда имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\ dx.$$

Замечание. Заметим, что эту формулу можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = \left. f(x)g(x)\right|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\ dx,$$

где выражение

$$\left. f(x)g(x)\right|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

называется *внеинтегральным членом*. Введя обозначения $u = f(x)$ и $v = g(x)$, мы можем переписать формулу интегрирования по частям в более коротком виде:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример 2. Вычислим интеграл

$$\int_0^1 x\,e^{2x}dx.$$

Выгодно взять $u = x$ и $dv = e^{2x}dx$, так что получаем:

$$\int_0^1 x\,e^{2x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x}dx \\ du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

При этом возникший по дороге внеинтегральный член $x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$ мы вычислили так:

$$x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - 0 \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \frac{e^2}{2}.$$

Особенно ясно проявляется указанное в замечании преимущество в том случае, если формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз подряд.

Пример 3. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx,$$

применив формулу интегрирования по частям два раза подряд. Имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \sin x\, dx \\ du = 2x\, dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = \underbrace{-x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x\, dx \\ du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Если бы мы сразу же не вычисляли значения подстановок во внеинтегральных членах, то нам пришлось бы несколько раз при нахождении первообразных выписывать значения этих внеинтегральных членов $-x^2 \cos x$ и $x \sin x$, а здесь мы сразу же заменили первую подстановку на 0, а вторую на $\frac{\pi}{2}$, что сэкономило некоторое место в записи и наши усилия.

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Методы вычисления площади криволинейной трапеции

Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная осью абсцисс, графиком заданной функции *f(x)*, и вертикальными прямыми *x=a, x=b*.

Метод прямоугольников

Словесный алгоритм *метода прямоугольников*

1. Весь участок [a,b] делим на n равных отрезков с шагом h=(b-a)/n.
2. Определяем значение y_i функции f(x) в каждой части деления, т.е. $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}.$
3. В каждой части деления функцию f(x) заменяем прямой, параллельной оси OX. В результате вся функция на участке [a,b] заменяется ломаной линией.
4. Для каждой части деления определяем площадь S_i частичного прямоугольника, как произведению высоты на основание.
5. Суммируем эти площади. Приближенное значение площади равно сумме площадей частичных прямоугольников.

Sn = f (x $_1$)* x $_1$ + f (x $_2$)* x $_2$ + … f (x $_n$)* x $_n$.

Если высота каждого частичного прямоугольника равна значению функции в левых концах каждого шага, то метод называется ***методом левых прямоугольников*** (рисунок 1.). Тогда формула имеет вид

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot y_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

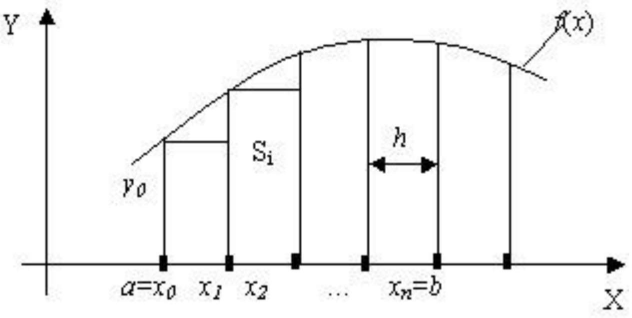


Рисунок 1. Метод левых прямоугольников

Если высота каждого частичного прямоугольника равна значению функции в правых концах каждого шага, то метод называется ***методом правых прямоугольников*** (рисунок 2.). Тогда формула имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} h \cdot y_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

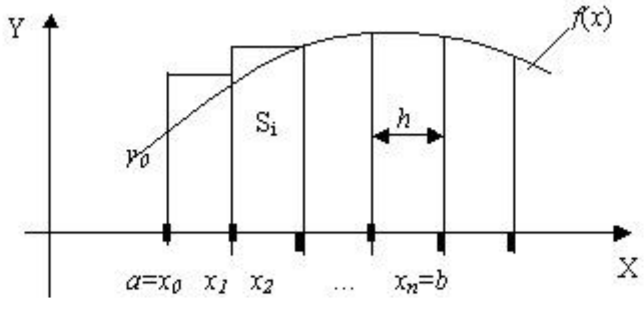


Рисунок 2. Метод правых прямоугольников

Точность каждого метода прямоугольников имеет порядок h.

Алгоритм вычисления площади построим в виде итерационного процесса поиска с автоматическим выбором шага. На каждом шаге будем уменьшать приращение аргумента в два раза, то есть увеличивать число шагов n в два раза. Выход из процесса поиска организуем по точности вычисления площади. Начальное число шагов n=2.

Метод трапеций

Словесный алгоритм *метода трапеций:*

1. Интервал [a,b] делим на n равных частей с шагом h=(b-a)/n.
2. Вычисляем значение функции в каждой узловой точке $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$

   причем $x_0=a$ и $x_n=b$.
3. На каждом шаге функцию f(x) заменяем прямой, соединяющей две соседние узловые точки. В результате вся функция на участке [a,b] заменяется ломаной линией, проходящей через все узловые точки.
4. Вычисляем площадь каждой частичной трапеции.
5. Приближенное значение площади равно сумме площадей частичных трапеций с высотой h=(b-a)/n, т.е.

$$S=\sum_{i=1}^{n-1} S_i$$

Найдем площади S_i частичных трапеций:

где $S_1=((f(x_0)+f(x_1))*h)/2$

$S_2=((f(x_1)+f(x_2))*h)/2$

$S_3=((f(x_2)+f(x_3))*h)/2$ …

$S_n=((f(x_{n-1})+f(x_n))*h)/2$

Приближенное значение площади равно

$$S=\sum_{i=0}^{n-1} S_i=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i+y_{i+1})=\frac{h}{2}(y_0+y_n+2\sum_{i=0}^{n-1} y_i)$$

Чем на большее число частей мы разобьем отрезок [a,b], тем точнее будет результат. Точность *метода трапеций* имеет порядок h^2.

Метод парабол (метод Симпсона)

Если n=1, то заданная функция заменяется прямой линией, т.е. фактически получается метод трапеций. Если же взять n=2, получаем *метод Симпсона.*

Идея метода исходит из того, что на частичном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает к кривой *y=f(x),* чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой, и поэтому значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных “сверху” дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой *y=f(x),* чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций.

В *методе Симпсона* в каждой части деления заданная функция заменяется квадратичной параболой $a_0x^2+a_1x+a_2$. В результате вся кривая заданной функции на участке [a,b] заменяется кусочно-непрерывной линией, состоящей из отрезков квадратичных парабол. Приближенное значение площади S равно сумме площадей под квадратичными параболами.

Так как для построения квадратичной параболы необходимо иметь три точки, то каждая часть деления в *методе Симпсона* включает два шага, т.е.

$L_k=2h.$

В результате количество частей деления N2=n/2. Тогда n в *методе Симпсона* всегда четное число.

Определим площадь S_1 на участке $[x_0, x_2]$

Площадь S_1 на участке $[x_0, x_2]$определяется по формуле:

$$S_1 = \frac{x_2 - x_0}{6}(2a_0(x_0 + x_0x_2 + x_2^2) + 3a_1(x_0 + x_2 + 6a^2)$$

Неизвестные коэффициенты квадратичной параболы a_0, a_1, a_2 определяются из условия прохождения параболой через три узловых точки с координатами (x_0y_0), (x_1x_1), (x_2y_2).

На основании этого условия строится система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 = y_0, \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = y_1, \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = y_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находятся коэффициенты параболы.

В результате имеем: $S_1=h/3*(y_0+4y_1+y_2)$

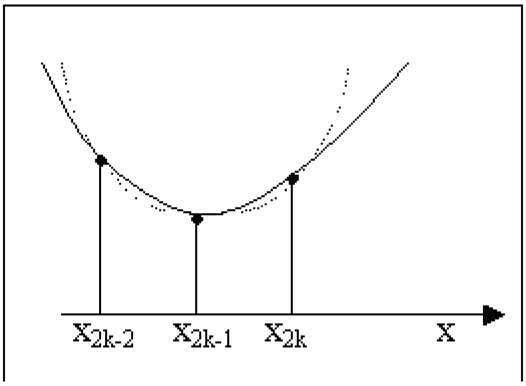
Для участка $[x_2, x_4]$:. $S_2=h/3*(y_2+4y_3+y_4)$

Для участка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$: $S_k=h/3*(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1})$, где $k=(i+1)/2$

Суммируя все площади S_i под квадратичными параболами, получим формулу по *методу Симпсона:*

$$S = \sum_{k=1}^{N2} S_k = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{N2}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}),$$

Где N2 - количество частей деления.



Геометрический смысл формулы Симпсона очевиден: площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x) на отрезке [a, b] приближенно заменяется суммой площадей фигур, лежащих под параболами (прямыми).

Таким образом, отрезок $[a, b]$ разбивается на $n=2m$ частей $x_0 =a$, $x_1 =a+h$, ..., $x_n =b$ с шагом $h=(b-a)/n$. Вычисляются значения $y_i = F(x_i)$ функции в точках x_i и находится значение площади по формуле Симпсона.

Затем количество точек разбиения удваивается и производится оценка точности вычислений:

Если $R_n > e$, то количество точек разбиения удваивается. Значение суммы $2(y_1 +y_2 +...+y_{2m-1})$ сохраняется, поэтому для вычисления площади при удвоении количества точек разбиения требуется вычислять значения y_i лишь в новых точках разбиения.

Когда функция сложная, отрезок [a, b] разбивается на n частей. Точность *метода Симпсона* имеет порядок (h^3/h^4), т.е. на два порядка выше точности метода трапеций.

Задание к работе:

Численное интегрирование функции методами прямоугольников в среднем, трапеций и методом Симпсона.

Вычислить интеграл методами прямоугольников в среднем, методом трапеций и методом Симпсона с шагом h=0.01. Подготовить отчет с результатами. Сравнить результаты.

<u>Вариант 1.</u> Вычислить интеграл:

$$\int_{0}^{2.0} \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx.$$

<u>Вариант 2.</u> Вычислить интеграл:

$$\int_{1}^{2.0} \frac{\sqrt{x^2+0.16}}{x^2}\,dx.$$

<u>Вариант 3.</u> Вычислить интеграл:

$$\int_{1}^{2.0} \frac{x^3}{3.0+x}\,dx.$$

<u>Вариант 4.</u> Вычислить интеграл:

$$\int_{1}^{2.0} x\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx.$$

<u>Вариант 5.</u> Вычислить интеграл:

$$\int_{0}^{1.0} 2^{3x}\,dx.$$

<u>Вариант 6.</u> Вычислить интеграл:

$$\int_{2.0}^{3.0} (x\ln(x))^2\,dx.$$

Вариант 7. Вычислить интеграл:

$$\int_{0.0}^{\pi} e^{x}\sin(x)\cos(x)dx.$$

Вариант 8. Вычислить интеграл:

$$\int_{2.0}^{3.0} \frac{\ln^{2}(x)}{x}dx.$$

Вариант 9. Вычислить интеграл:

$$\int_{2.0}^{3.0} \frac{1}{x\lg(x)}dx.$$

Вариант 10. Вычислить интеграл:

$$\int_{0}^{2.0} \frac{1}{\sqrt{1+3x+2x^{2}}}dx.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой способ вычисления определенного интеграла точнее?
2. Дайте определение криволинейной трапеции?

Практическое занятие

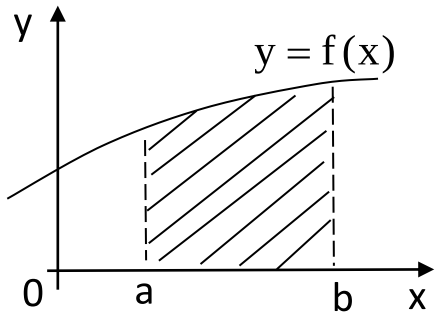
Тема: Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел вращения.

Цель: научиться вычислять площади фигур и объем тел вращения.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

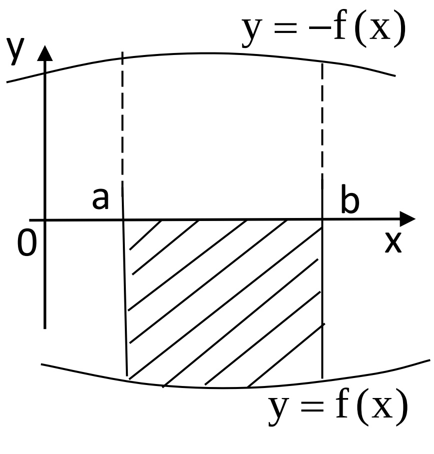
Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на [a,b], $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рисунок 1).



$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Рисунок 1

Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рисунок 2), то из соображений симметрии видим, что



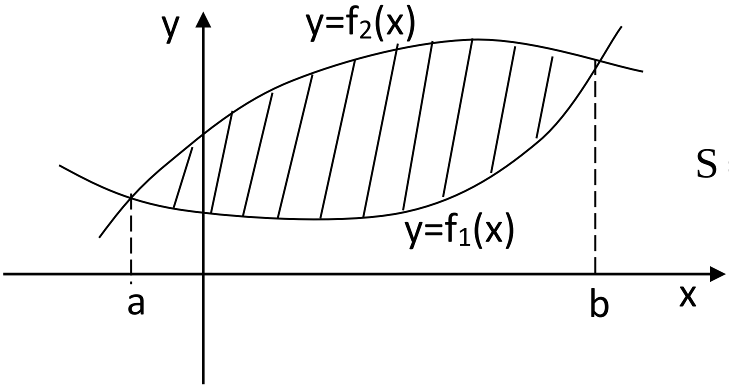
$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Рисунок 2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (1) или (2) (рисунок 3. и 4)

Рисунок 3

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \qquad (3)$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (4)$$

Рисунок 4

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1;1)$ – вершина параболы.

$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $x = 0$; $x = 2$.

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4)

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (кв.ед.)}.$$

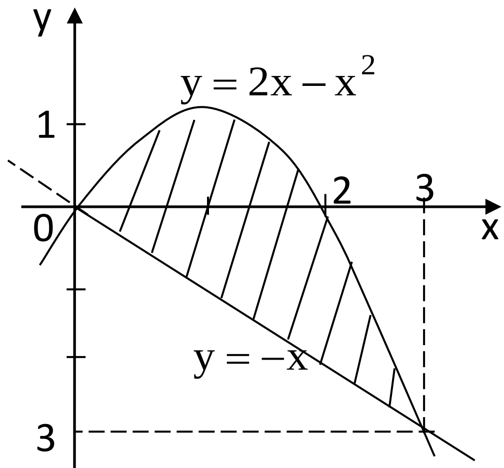


Рисунок 5

Пример. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

Решение. Сделаем чертеж (рисунок 6)

$x^2 + y^2 = 8$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{8}$.

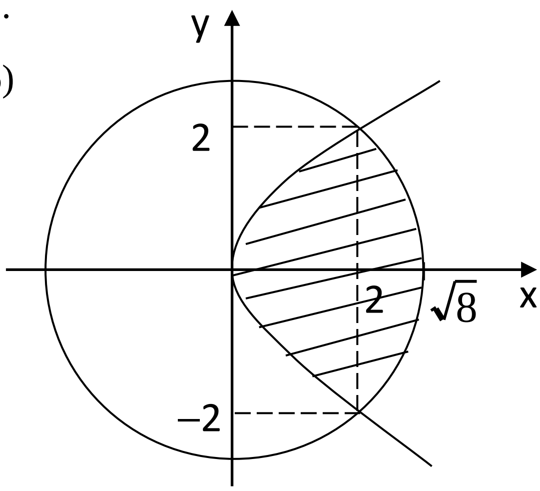


Рисунок 6

$y^2 = 2x$ – парабола, имеющая вершину

в т.O(0,0)

Найдем точки пересечения параболы

и окружности:

$$\begin{cases} y^2 = 8 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \quad 8 - x^2 = 2x \quad \Rightarrow \begin{matrix} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x_1 = -4; x_2 = 2 \end{matrix}$$

$x = -4$ – не удовлетворяет условию $y^2 = 2x$.

Если $x = 2$, то $y^2 = 4$ или $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Найдем площадь заштрихованной области по формуле (4), в которой изменены переменные интегрирования:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \sqrt{8 - y^2};$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2\int_{0}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{8}\sin t; \quad dy = \sqrt{8}\cos t\, dt \\ \text{Если } y = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{Если } y = 2, \text{ то } 2 = \sqrt{8}\,\text{sint}, \ \text{sint} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \ t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 = 2\int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy - \frac{8}{3} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \sqrt{8-8\sin^2 t}\cdot\sqrt{8}\cos t\,dt - \frac{8}{3} = 16\int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2t)\,dt - \frac{8}{3} = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{кр.} = \pi R^2; \quad S_{кр.} = \pi\cdot(\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{кр.} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Решение. Точка $x = 1$ является особой точкой, поскольку подынтегральная функция имеет в ней бесконечный разрыв. Поэтому:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right| - \ln 1\right) = \frac{1}{2}(-\infty - 0) = -\infty$$ - получили бесконечный предел.

Таким образом, данный интеграл расходится.

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 2.$$

Решение. Площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, образованных прямой $y = x$ и гиперболой $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$.

$$S=\int_{1}^{2}(x-\frac{1}{x})dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln x\right)\Bigg|_1^2=2-\ln 2-\frac{1}{2}+0=1\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Задание 5. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0, x=0$.

Решение. Используем формулу для нахождения объёма тел вращения: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

$$V=\pi\int_0^1(1-x^2)dx=\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\pi}{3}.$$

Задание к работе:

Вариант № 1.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=\frac{1}{x^2}$, $y=-x$, $x=-2$.

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y=2\sqrt{x}$, $y=2x$.

Вариант № 2.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=2\cos x$, $y=3\cos x$, $x=-\pi$, $x=\pi$.

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sqrt{x}$, $y=x$.

Вариант № 3.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=tg\,x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x},\ y = 2,\ x = 4.$

Вариант № 4.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sin x,\ y = 1,\ x = 0.$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2,\ y = 2x.$

Вариант № 5.

Задание 1. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 4\sin 3x,\ x = -\frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2}.$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2,\ y = 4x.$

Вариант № 6.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 3.$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^3,\ y = x.$

Вариант № 7.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = -x^2 + 6x - 8,\ x = -1.$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^3,\ y = 4x$.

Вариант № 8.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt[3]{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 8.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^3,\ y = x$.

Вариант № 9.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3\cos 2x,\ y = 1\frac{1}{2},\ x = -\frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{6}.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^3,\ y = 4x$.

Вариант № 10.

Задание 1. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}.$$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = 1 - y^2,\ x = 0.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^3,\ y = x$.

Вариант № 11.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 3.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x},\ y = 2x$.

Вариант № 12.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2 + 6x - 8,\ x = -1.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{x},\ y = x$.

Вариант № 13.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt[3]{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 8.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x},\ y = 2,\ x = 4$.

Вариант № 14.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3\cos 2x,\ y = 1\frac{1}{2},\ x = -\frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{6}.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2,\ y = 2x$.

Вариант № 15.

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = 1 - y^2,\ x = 0.$$

Задание 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2,\ y = 4x$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.

2. Выполнить задание.

3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.

2. Цель.

3. Материальное обеспечение.

4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, заданной в декартовой системе координат.
2. Записать формулы для вычисления объёма тела, полученного вращением фигуры вокруг оси ОХ и вокруг оси ОУ, заданной в декартовой системе координат.

Практическое занятие

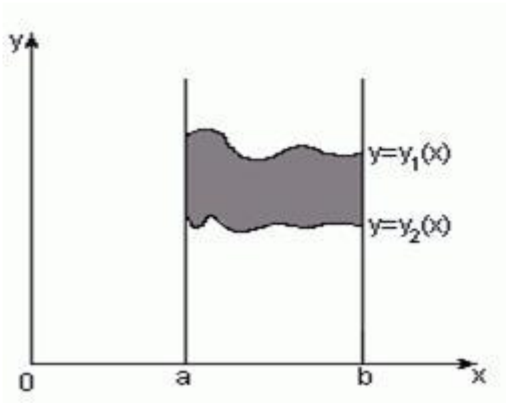
Тема: Приложения определенного интеграла.

Цель: научиться применять определенный интеграл для различных вычислений; отработать навыки в вычислении криволинейной трапеции; вычислении объема; вычисление длины дуги.

Время выполнения: 2 часа.

Теоретические основы

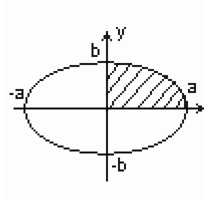
1. Вычисление площади криволинейной трапеции.



$$S:\left\{(x,y):\begin{array}{c} a\le x\le b \\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\end{array}\right.$$

$$y_1(x), y_2(x)\in[a,b].$$

$$|S|=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))dx$$



Пример. Вычислить площадь ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

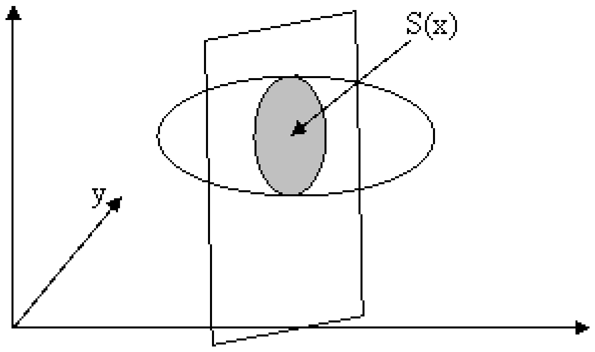
Ввиду очевидной симметрии эллипса относительно осей координат, достаточно вычислить четвёртую часть площади, расположенную в правом верхнем квадранте.

Из уравнения эллипса находим у как функцию от х: у(х)=b $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$

Тогда площадь эллипса вычисляем по формуле:

$|S|=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx.$ Сделав замену $x=a\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2},$ получим интеграл: $S=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt=\pi ab.$

2. Вычисление объёмов тела, площади сечения которых известны.



Пусть для некоторого тела в пространстве известно значение *S(x)* – площади сечения этого тела плоскостью, проходящей через точку *x’* и параллельной плоскости OYZ.

Тогда объём этого тела может быть вычислен по формуле $V=\int_a^b S(x)dx.$

<u>Пример.</u> Вычислить объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

В сечении эллипсоида плоскостью, проходящей через точку *x,* $-a\le x\le x,$ параллельной плоскостью OYZ будет эллипс: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ или $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1.$

Как было доказано в предыдущем примере, площадь *S(x)* этого эллипса равна $S(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2}).$

Следовательно, объём эллипсоида можно вычислить по формуле:

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})=\frac{4}{3}\pi abc.$$

<u>3. Вычисление длинны дуги плоской кривой.</u>

Пусть кривая Г задана на плоскости OXY уравнением y=y(x), $x\in[a,b]$ и $y'(x)\in C[a,b].$

Тогда длинна этой кривой может быть вычислена по формуле:

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить длину окружности $x^2+y^2=R^2$.

В силу симметрии окружности относительно осей координат, достаточно длину четверти окружности, лежащей в первом квадранте. Выражая из уравнения окружности *y* как функцию от *x*: $y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ и подставляя значение $y'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ в формулу для вычисления длинны дуги кривой, получим равенство:

$$|\Gamma_{окр}|=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=4\int_0^R\frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^R=2\pi R.$$

<u>4. Вычисление площади поверхностей вращения плоской кривой вокруг неподвижной оси.</u>

Пусть кривая Г, заданная как и выше уравнением *y=y(x),* $x\in[a,b]$, $y'(x)\in C[a,b],$ вращается вокруг оси ОХ. Тогда площадь поверхности вращения этой кривой может быть вычислена по формуле:

$$|S_{OX}|=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Площадь поверхности сферы можно представить как площадь поверхности вращения кривой $y(x)=\sqrt{R^2-x^2},\ |x|\le R$ вокруг осиОХ.

Пользуясь формулой для площади поверхности вращения кривой вокруг оси ОХ, получим значение площади поверхности сферы:

$$|S_{сферы}|=2\pi\int_{-R}^{-R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}}dx=4\pi R^2.$$

Задание к работе:

Вариант 1.

Задача 1. Вычислить меньшую из площадей, содержащуюся между линиями: $x^2+y^2=16$; $x^2=6y$.

Задача 2. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси ОУ: $4x^2+y^2=4$.

Задача 3. Пластина в форме прямого параболического сегмента г основанием 2l и высотой h погружена вертикально в жидкость плотности φ, так что основание сегмента находится на поверхности жидкости Найти силу давления жидкости на пластину (По закону Паскаля сила давления жидкости плотности φ на площадку S при глубине погружении H, независимо от ее ориентации P = φgHS, g - ускорение силы тяжести). 2l = 2 м, h = 1 м φ = 1 г/см^3, g = 9,81 м/с^2

Вариант 2.

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную линией p=asin^3(x/3), лежащую ниже полярной оси.

Задача 2. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кривой y=x^2/3 для -2 =< x =< 2

Задача 3. Котел имеет форму половины эллипсоида вращения с полуосями a, a, c. Он наполнен жидкостью, плотность которой равна φ. Вычислить работу, совершаемую при выкачивании всей жидкости из котла a = 2 м, c = 3 м, φ = 0,8 г/см^3, g = 9,81 м/с^2

Вариант 3.

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой y = lnx, касательной к ней в точке x = e и осью OX.

Задача 2. Найти длину дуги всей кривой: x = 5 cos^3(t/4); y = 5sin^3(t/4)

Задача 3. На дне котла, имеющего форму половины эллипсоида вращения с полуосями a, a, c, есть отверстие площадью S. Сколько потребуется времени на то, чтобы вода, наполняющая котел, вытекла из него? (По закону Торичелли: скорость истечения жидкости V = λ√(2gh), где h - высота столба жидкости над отверстием, g - ускорение силы тяжести, λ = 0, б - для воды), a = 3 м? c = 5 м, S = 9П см^2, g = 9,81 м/с^2.

Вариант 4.

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную линиями: (x — 2)(y + 3) =6 и x + y =6.

Задача 2. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = t^2$; $y = 1/3(t^{2-3})$ вокруг оси OX.

Задача 3. Пластина в форме равнобедренного треугольника вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через его вершину параллельно основанию. Вычислить кинетическую энергию пластинки, если длина основания равна a, длина высоты, опущенной на основание h, толщина пластинки δ, а. плотность материала, из которого она изготовлена ρ. (Кинетическая энергия материальной точки, имеющей массу m и обладающей скоростью v, определяется по формуле К = mv2/2).

a = 40 см, h = 10 см, ω = 5П 1/с, δ = 0,2 см, ρ = 2,2 г/см3

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение интегральной суммы *f(x)* на *[a;b]*.
2. Сформулируйте определение определенного интеграла.
3. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
4. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
5. В чем состоит свойство интеграла с переменным верхним пределом?
6. Запишите и прочтите формулу Ньютона-Лейбница.
7. В чем суть метода интегрирования подстановкой?
8. Каким условиям должна удовлетворять (и почему?) функция *x=φ(t)*, используемая в качестве подстановки?

Практическое занятие

Тема: Решение дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

***Цель*:** научиться различать дифференциальные уравнения первого порядка; отработать навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющими переменными.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Обыкновенным дифференциальным уравнением $n^{-го}$ *порядка* называется выражение вида:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{или} \qquad F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

то есть, уравнение, содержащее неизвестную функцию $y = y(x)$ и её производные до $n^{-го}$ порядка.

Так, например:

1) $y' = f(x, y)$, или $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ - это дифференциальное уравнение первого порядка;
2) $y'' + 2y = 0$ - дифференциальное уравнение второго порядка.

Из определения дифференциального уравнения следует, что его порядок равен порядку старшей производной, содержащейся в нём.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция

$$y = \varphi(x),$$

которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Пример Проверить (самостоятельно), будут ли функции

$$y = \cos x;\ y = \sin x;\ y = C\sin x;\ y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

решениями дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Решение:

Рассмотрим уравнения первого порядка.

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

имеет место следующая

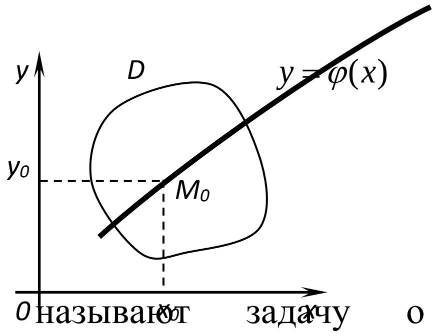
теорема Коши

Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области D вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, то для всякой точки $M(x_0, y_0)$, принадлежащей области D, в некоторой её окрестности, существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию при

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Условия (2) называются ***начальными условиями***.

Геометрически это означает, что при выполнении условий теоремы через каждую внутреннюю точку M_0 области D проходит единственная интегральная кривая.



Задачей Коши называют задачу о нахождении решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Вышеприведённую теорему называют ***теоремой о существовании и единственности решения задачи Коши***.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называют функцию $y = \varphi(x, C)$ такую, что

1) при любом C она является решением дифференциального уравнения (1);

2) каковы бы ни были начальные условия (2), всегда можно найти такое $C = C_0$, что $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальным условиям (2).

Частным решение называется решение, полученное из общего при конкретном значении C.

Простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1) Уравнение с ***разделёнными переменными***

$$y' = f(x)$$

Или $f_1(y)dy + f_2(x)dx = 0$.

Решая первое уравнение, получим $dy = f(x)dx$.

Интегрируя, найдём общее решение $y = \int f(x)dx + C$.

Решая второе, получим $f_1(y)dy = -f_2(x)dx$.

Интегрируя, найдём общее решение.

2) Уравнение с ***разделяющимися переменными***,

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$

или $N(x)R(y)dx + M(x)K(y)dy = 0$.

Разделим обе части первого уравнения $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ на $f_2(y)$ и умножим на dx, получим уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Для второго уравнения: разделим обе части на произведение $M(x)R(y)$, получим также уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{N(x)}{M(x)}dx + \frac{K(y)}{R(y)}dy = 0.$$

Операция деления уравнения на произведение $M(x)$ $K(x)$ называется **разделением переменных**.

При делении на произведение $M(x)R(y)$ можно потерять некоторые решения, которые получаются из уравнения

$$M(x)R(y) = 0.$$

Определяя из этого уравнения решения $y=\varphi(x)$, следует проверить, является ли оно решением исходного уравнения. Если не является, его следует отбросить, а если является, то проверить, входит ли оно в общий интеграл. Если входит, то оно есть частное решение, а если не входит, то это решение называется **особым**.

Пример Решить уравнение $y(x+3)dx+(y+3)xdy=0$.

Решение:

Разделим уравнение на произведение xy, получим:

$$\frac{x+3}{x}dx+\frac{y+3}{y}dy=0.$$

Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\int(1+\frac{3}{x})dx+\int(1+\frac{3}{y})dy=0$$

$$x+3\ln|x|+y+3\ln|y|=c$$

$$3\ln|xy|+x+y=c.$$

В этом уравнении $M(x)R(y)$ имеет вид $xy=0$. Его решение $x=0$, $y=0$ является решением исходного уравнения, но не входит в общий интеграл. Следовательно, решение $x=0$, $y=0$ является особым.

Пример Найти общее решение $y'=\frac{e^y}{\cos^2 x}$.

Решение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{\cos^2 x};$$

$$\frac{dy}{e^y}=\frac{dx}{\cos^2 x};$$

интегрируя, найдем общее решение

$$-e^{-y}=tgx-C \text{ или } \frac{1}{e^y}=C-tgx;$$

$$e^y=\frac{1}{C-tgx};$$

$$y=\ln\frac{1}{C-tgx};$$

Задание к работе:

1. Решить уравнение с разделяющимися переменными $xy' - y = 0$.
2. Решить уравнение с разделяющимися переменными $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$.
3. Решить уравнение с разделяющимися переменными $xy' + y = 0$.
4. Решить уравнение с разделяющимися переменными $y' = y$, если $y(0) = 1$.
5. Решить уравнение с разделяющимися переменными $2y'\sqrt{x} = y$, если $y(0) = 1$.
6. Решить уравнение с разделяющимися переменными $y' = 2\sqrt{y}\ln x$.
7. Решить уравнение с разделяющимися переменными $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$.
8. Решить уравнение с разделяющимися переменными $xyy' = 1 - x^2$, если $y(1)=1$.
9. Решить уравнение с разделяющимися переменными $yy' = \dfrac{1 - 2x}{y}$.
10. Решить уравнение с разделяющимися переменными $y'e^x - x = 2$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?

2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения первого порядка?

3. Какое решение дифференциального уравнения первого пордка называется общим и какое частным?

4. Каков общий вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?

5. В чем заключается задача Коши?

6. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения первого порядка?

7. С помощью какой подстановки решается однородное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Практическое занятие

Тема: Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: отработать навыки в решении однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определение 1. Уравнение 1-го порядка $y' = f(x,y)$ называется однородным, если для его правой части при любых $\alpha \neq 0$ справедливо соотношение $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$, называемое условием однородности функции двух переменных нулевого измерения.

Пример 1. Показать, что функция $f(\frac{x^2+xy+y^2}{y^2-x^2})$ - однородная нулевого измерения.

Решение. $f\left[\frac{(\alpha x)^2+(\alpha x)(\alpha y)+(\alpha y)^2}{(\alpha y)^2-(\alpha x)^2}\right] = f(\frac{\alpha^2x^2+\alpha^2xy+\alpha^2y^2}{\alpha^2y^2-\alpha^2x^2}) =$

$= f\left[\frac{\alpha^2(x^2+xy+y^2)}{\alpha^2(y^2-x^2)}\right] = f(\frac{x^2+xy+y^2}{y^2-x^2}), \qquad \alpha \neq 0$,

что и требовалось доказать.

Теорема. Любая функция $F(x,y) = f(\frac{y}{x})$ - однородна и, наоборот, любая однородная функция $F(x,y)$ нулевого измерения приводится к виду $f(\frac{y}{x})$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, т.к. $f(\frac{\alpha y}{\alpha x}) \equiv f(\frac{y}{x})$.

Докажем второе утверждение. Положим $\alpha = \frac{1}{x}$, тогда для однородной функции $F(x,y) = F(\alpha x, \alpha y) = F(1, \frac{y}{x}) = f(\frac{y}{x})$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1)

в котором M и N – однородные функции одной и той же степени, т.е. обладают свойством $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^m f(x, y)$ при всех α, называется однородным.

Очевидно, что это уравнение всегда может быть приведено к виду $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ (2) , хотя для его решения можно этого и не делать.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции *y* по формуле *y=zx,* где *z(x)* – новая искомая функция. Выполнив эту подстановку в уравнении (4.2), получим: $z'x + z = \varphi(z)$ или $x\frac{dz}{dx} - [\varphi(z) - z] = 0$ или $\frac{1}{\varphi(z) - z}dz = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем общий интеграл уравнения относительно функции *z(x)* $\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C$, который после повторной замены $z = \frac{y}{x}$ дает общий интеграл исходного уравнения. Кроме того, если z_i - корни уравнения $\varphi(z) - z = 0$, то функции $y = z_i x, x \neq 0$ - решения однородного заданного уравнения. Если же $\varphi(z) = z$, то уравнение (2) принимает вид

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ и становится уравнением с разделяющимися переменными. Его решениями являются полупрямые: $\begin{cases} y = Cx, x \neq 0, \\ x = 0, y \neq 0. \end{cases}$.

<u>Замечание.</u> Иногда целесообразно вместо указанной выше подстановки использовать подстановку *x=zy.*

Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.

Рассмотрим уравнение вида $$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{ax + by + C}). \qquad (1)$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, то это уравнение с помощью подстановки $x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$, где ξ и η - новые переменные, а α и β - некоторые постоянные числа, определяемые из системы $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + C_1 = 0 \\ a\alpha + b\beta + C = 0, \end{cases}$

Приводится к однородному уравнению $\dfrac{d\eta}{d\xi} = f(\dfrac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta})$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{k(ax+by)+C_1}{ax+by+C}) \equiv f_1(ax+by).$$

Полагая $z=ax+by$, приходим к уравнению, не содержащему независимой переменной.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Проинтегрировать уравнение $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точки: а) (2;2); б) (1;-1).

Решение.

Положим $y=zx$. Тогда $dy=xdz+zdx$ и

$(x^2 + 2zx^2 - z^2x^2)dx + (z^2x^2 + 2x^2z - x^2)(xdz + zdx) = 0$.

Сократим на x^2 и соберем члены при dx и dz:

$(z^3 + z^2 + z + 1)dx + (z^2 + 2z - 1)xdz = 0$.

Разделим переменные: $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{z^2 + 2z - 1}{(z^2 + 1)(z + 1)}dz = 0, \quad z + 1 \neq 0$.

Интегрируя, получим $ln|x| - ln|z + 1| + ln(z^2 + 1) = ln|C_1|$;

или $\dfrac{x(z^2+1)}{z+1}=C, \quad C=\pm|C_1|.$

Заменив здесь z на $\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл заданного уравнения в виде (2) $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=C$ или $x^2+y^2=C(x+y) \quad (C\neq 0, C\neq\infty)$.

Это семейство окружностей $(x-\dfrac{C}{2})^2+(y-\dfrac{C}{2})^2=\dfrac{C^2}{2}$, центры которых лежат на прямой $y = x$ и которые в начале координат касаются прямой $y + x = 0$. Эта прямая $y = -x$ в свою очередь частное решение уравнения.

Теперь режим задачи Коши:

А) полагая в общем интеграле $x=2$, $y=2$, находим $C=2$, поэтому искомым решением будет $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Б) ни одна из окружностей (2) не проходит через точку (1;-1). Зато полупрямая $y = -x$, $0<x<\infty$ проходит через точку и дает искомое решение.

Пример 2. Решить уравнение: $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

Решение.

Уравнение является частным случаем уравнения (1).

Определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}$ в данном примере $\neq 0$, поэтому надо решить следующую систему $\begin{cases} \alpha+\beta-2=0 \\ \alpha-\beta+4=0 \end{cases}$

Решая, получим, что $\alpha=-1, \beta=3$. Выполняя в заданном уравнении подстановку $x=\xi-1, y=\eta+3$, получаем однородное уравнение $(\xi+\eta)d\xi+(\xi-\eta)d\eta=0$. Интегрируя его при помощи подстановки $\eta=z\xi$, находим $\xi^2+2\eta\xi-\eta^2=C$.

Возвращаясь к старым переменным x и y по формулам $\xi=x+1, \eta=y-3$, имеем $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

Обобщенное однородное уравнение.

Уравнение *M(x,y)dx+N(x,y)dy=0* называется обобщенным однородным, если удается подобрать такое число k, что левая часть этого уравнения становится однородной функцией некоторой степени m относительно x, y, dx и dy при условии, что x считается величиной первого измерения, y – k-го измерения, dx и dy – соответственно нулевого и *(k-1)*-го измерений. Например, таким будет уравнение $(\frac{2}{x^2} - y^2)dx + dy = 0$. (6.1)

Действительно при сделанном предположении относительно измерений

x, y, dx и dy члены левой части $\frac{2dx}{x^2}, -y^2dx$ и dy будут иметь соответственно измерения -2, $2k$ и k-1. Приравнивая их, получаем условие, которому должно удовлетворять искомое число k: -2 = $2k$ = k-1. Это условие выполняется при k = -1 (при таком k все члены левой части рассматриваемого уравнения будут иметь измерение -2). Следовательно, уравнение (1) является обобщенным однородным.

Обобщенное однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = zx^k$, где z – новая неизвестная функция. Проинтегрируем указанным методом уравнение (6.1). Так как k = -1, то $y = \frac{z}{x}$, после чего получаем уравнение $(z^2 + z - 2)dx - xdz = 0$.

Интегрируя его, находим $z = \frac{C + 2x^3}{C - x^3}$, откуда $y = \frac{C + 2x^3}{(C - x^3)x}$. Это общее решение уравнения (1).

Задание к работе:

1. Решить однородное уравнение $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

2. Решить однородное уравнение $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, если $y(1) = 0$.

3. Решить однородное уравнение $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

4. Решить однородное уравнение $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

5. Решить однородное уравнение $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$, если y(1)=0.

6. Решить однородное уравнение $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

7. Решить однородное уравнение $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

8. Решить однородное уравнение $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

9. Решить однородное уравнение $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$, если $y(-1) = 1$.

10. Решить однородное уравнение $yy' = 2y - x$, если $y(1) = 2$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
2. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка?
3. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Практическое занятие

Тема: Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: отработать навыки в решении линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Материальное обеспечение: практическая работа.

Общие теоретические положения

Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$,

где $p(x)$, $f(x)$ - непрерывная функция от x на интервале (a,b), называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Неизвестная функция $y(x)$ и её производная входят в это уравнение в первой степени – линейно.

Линейные уравнения обычно решают *методом Бернулли*.

Представим искомую функцию в виде произведения двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$.

Пусть $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$,

и уравнение примет вид

$$\frac{dy}{dx}v+\frac{dv}{dx}u+p(x)uv=f(x) \text{ или } v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+p(x)uv=f(x).$$

Полученное уравнение разобьём на два таким образом:

1) Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы сумма второго и третьего слагаемых обратилась в нуль:
   $u(\frac{dv}{dx}+p(x)v)=0$;
2) $v\frac{du}{dx}=f(x)$.

Решаем первое: так как $u\neq 0$, относительно $v(x)$ имеем уравнение $\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \text{ или } \ln v = -\int p(x)dx$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

Функцию v подставим во второе уравнение:

$$v\frac{du}{dx} = f(x), \text{ откуда } du = \frac{f(x)}{v(x)}dx.$$

$$u = \int \frac{f(x)}{v(x)}dx + c = \int (f(x)e^{-\int p(x)dx})dx + c.$$

Найдём общее решение по формуле

$$y = uv,$$

подставив найденные функции вместо u, v.

Пример Решить уравнение $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$.

Решение:

Положим $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

Подставляя выражения для y и y' в данное уравнение получим:

$$u'v + u(v - \frac{2x}{x^2+1}v) = x\sqrt{x^2+1}$$

$$1)\ v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0$$

$$2)\ vu' = x\sqrt{x^2+1}.$$

Решаем первое уравнение:

После разделения переменных получим $\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1}$. Отсюда $\ln|v| = \ln(x^2+1)$ или $v = x^2+1$.

Решаем второе уравнение:

Подставим найденное значение v, получим:

$$(x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, находим функцию u:

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$u = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + c\,.$$

Теперь можно записать общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = uv \text{ или}$$

$$y = (\sqrt{x^2+1} + c)(x^2+1)\,.$$

Уравнением Бернулли

называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = y^n f(x)\,,$$

где n – любое вещественное число.

Если n равно нулю или единице, то мы получим линейное дифференциальное уравнение.

Уравнение Бернулли можно сразу решать методом Бернулли, полагая $y = u(x)v(x)$. Следует отметить, что при $n > 0$ функция $y(x) = 0$ является решением Бернулли.

Пример Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = xy^4$.

Решение:

Приведём решение методом Бернулли.

Полагая $y = uv$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = xu^4v^4;$$

$$u(v' + \frac{v}{x}) + u'v = xu^4v^4;$$

получим

1) $\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0$; $\frac{dv}{dx} = -\frac{dx}{x}$; $\ln v = -\ln x$; $v = \frac{1}{x}$.

2) Подставим найденную функцию v:

$$u'\frac{1}{x} = x^{\frac{1}{4}}u^4;\ \frac{du}{dx} = \frac{u^4}{x^2};\ \frac{du}{u^4} = \frac{dx}{x^2};\ -\frac{1}{3u^3} = -\frac{1}{x} + c;\ \frac{1}{u^3} = \frac{3(1+cx)}{x};\ u = \sqrt[3]{\frac{x}{3(1+cx)}}$$

и окончательно $y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{3(1+cx)}}$.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Определение. Если в уравнении $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1) левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, то оно называется уравнением в полных дифференциалах. Это уравнение можно переписать в виде $du(x,y)=0$, следовательно, его общий интеграл есть $u(x,y)=c$.

Например, уравнение $xdy+ydx=0$ есть уравнение в полных дифференциалах, так как его можно переписать в виде $d(xy)=0$. Общим интегралом будет $xy=c$.

Теорема. Предположим, что функции M и N определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по y и по x. Тогда, для того, чтобы уравнение (9.1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$ (2).

Доказательство.

Доказательство необходимости этого условия очевидно. Поэтому докажем достаточность условия (9.2). Покажем, что может быть найдена такая функция $u(x,y)$, что $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$.

Действительно, поскольку $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$,то

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y) \qquad (9.3)$$

, где $\varphi(y)$ - произвольная дифференцируемая функция. Продифференцируем (9.3) по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)$$

. Но $\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y).$$

Положим $\varphi'(y) = Q(x_0, y) \Leftrightarrow \varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$ и тогда $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$.

Итак, построена функция $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$, для которой $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, а $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

Рассмотрим пример.

Пример. Найти общий интеграл уравнения: $(\dfrac{y}{x^2 + y^2} + e^x)dx - \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy = 0$.

Решение. Здесь $M(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + e^x, \quad N(x, y) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Тогда $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$. Следовательно, заданное дифференциальное уравнение 1-го порядка является уравнением в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция *u(x,y)*, частные производные которой соответственно по *x* и *y* равны *M(x,y)* и *N(x,y)*:

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + e^x, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Интегрируем первое из двух соотношений по *x*:

$u(x, y) = \int(\dfrac{y}{x^2 + y^2} + e^x)dx + \varphi(y)$, $u(x, y) = arctg\dfrac{x}{y} + e^x + \varphi(y)$.

Теперь продифференцируем *u(x,y)* по *y* и приравняем полученное в результате выражение выписанной выше частной производной $\dfrac{du}{dy}$:

$$-\frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Откуда $\varphi'(y) = 0$ и $\varphi(y) = c$. Следовательно, общим интегралом заданного уравнения является: $arctg\dfrac{x}{y} + e^x = c$.

Задание к работе:

Вариант 1

1. Решить линейное уравнение $y' - 3\frac{y}{x} = x$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + 2\frac{y}{x}dy = 0$.

Вариант 2

1. Решить линейное уравнение $xy' + y = \ln x + 1$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$.

Вариант 3

1. Решить линейное уравнение $(2x+1)y' + y = x$, если $y(0) = 2/3$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.

Вариант 4

1. Решить линейное уравнение $y' + 2y\cos x = \sin 2x$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$.

Вариант 5

1. Решить линейное уравнение $y' + 2y = 4x$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах

$(x\cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$.

Вариант 6

1. Решить линейное уравнение $xy' + y = e^x$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах

$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$.

Вариант 7

1. Решить линейное уравнение $y' + y = \cos x$, если $y(0) = 1$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$.

Вариант 8

1. Решить линейное уравнение $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{x^2}}{x}$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах $(y - y^3)dx + (x - 3xy^2)dy = 0$.

Вариант 9

1. Решить линейное уравнение $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах

$(2y + x^2y^3)dx + (2x + x^3y^2)dy = 0$.

Вариант 10

1. Решить линейное уравнение $y' - \dfrac{y}{2x} = x^2$, если $y(1) = 1$.

2. Решить уравнение в полных дифференциалах

$2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением второго порядка?

2. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?

Практическая работа

Комплексные числа

Комплексные числа изображаются точками на комплексной плоскости (рис.4).

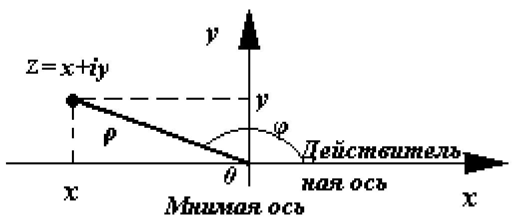


Рис. 4

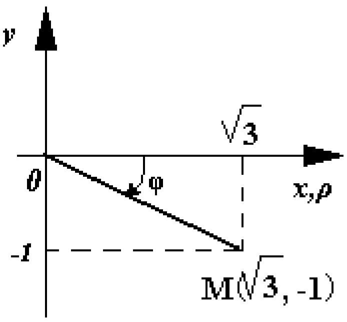


Рис. 5

<u>Пример.</u> Найти полярные координаты точки $M\,(\sqrt{3};-1)$) (рис. 5).

<u>Решение.</u> Используя формулы (1), находим полярный радиус и полярный угол точки *M*:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2, \qquad tg\varphi=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \varphi=-arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6},$$

так как точка *M* лежит в IV четверти.

Решение задач

<u>Пример 1.</u> На комплексной плоскости постройте точки:

а) $z=-2+2i$; *б*) $z=-1-i$; в) $z=-4$;

<u>Решени</u>е. *а)* Действительная координата числа *z* x = -2, мнимая координата y = 2 (рис. 1а);

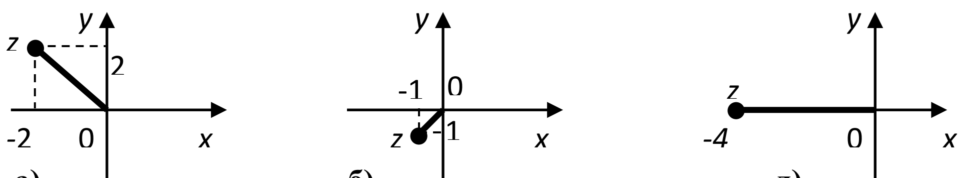
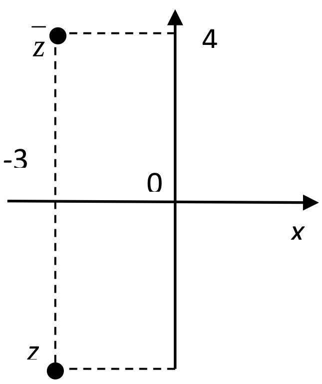


Рис. 1 а) **б)** **д)**

б) действительная координата числа *z* x = -1, мнимая координата y = -1 (рис. 1*б*) **;**
в) действительная координата числа *z* x = -4, мнимая координата y = 0 (рис. 1*в*).

<u>Пример 2.</u> Найдите комплексно-сопряженные числа для следующих чисел и постройте их на комплексной плоскости: *а*) $z=-3-4i$; *б*) $z=-2+3i$;

<u>Решение.</u> : *а*) $z=-3-4i$; $\bar{z}=-3+4i$; *б*) $z=2+3i$; $\bar{z}=2-3i$;



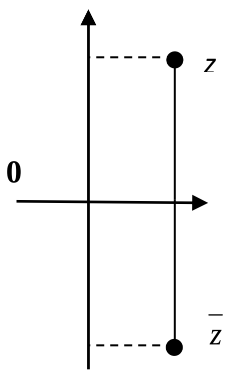


Рис. 2а,б

Пример 3. Решите квадратные уравнения:

$a)\ 2x^2 + x + 1 = 0;$ $\qquad$ $б)\ x^2 - 3x + 11 = 0;$

Решение. $a)\ 2x^2 + x + 1 = 0;$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4\cdot 2\cdot 1 = -7;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i.$$

$б)\ x^2 - 3x + 11 = 0;$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 1\cdot 11 = -35;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{35}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{35}}{2}i.$$

Пример 4. Даны числа $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 3 - 2i$. Найдите числа:

$a)\ z_1 + z_2;$ $\qquad$ $б)\ z_1 - z_2;$

$в)\ z_1 * z_2;$ $\qquad$ $г)\ \dfrac{z_1}{z_2}.$

Решение. $a)\ z_1 + z_2 = (-2+3i) + (3-2i) = -2+3i+3-2i = 1+i;$

$б)\ z_1 - z_2 = (-2+3i) - (3-2i) = -2+3i-3+2i = -5+5i;$

$в)\ z_1 * z_2 = (-2+3i)\cdot(3-2i) = -6+4i+9i-6i^2 = -6+13i+6 = 13i;$

$$г)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{-2-3i}{3-2i} = \frac{(-2-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = . \frac{-6-4i-9i-6i^2}{3^2+2^2} = \frac{-6-13i+6}{9+4} = \frac{-13i}{13} = -i$$

Ответ. $a)\ 1+i;$ $\quad$ $б)\ -5+5i;$ $\quad$ $в)\ 13i;$ $\quad$ $г)\ -i.$

Пример 5. Представьте в тригонометрической форме следующее комплексное число: $2+2i$;

Решение. $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$arg\, z = \varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2}{2} = arctg1 = \frac{\pi}{4};$$

$$2+2i = 2\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4} + i\, sin\frac{\pi}{4}).$$

Ответ. $2\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4} + i\, sin\frac{\pi}{4}).$

Пример 6. Дано $z_1 = -3 + 5i,\ z_2 = 3 + 2i,\ z_3 = -4 + 7i.$ Вычислите, чему равны модули и аргументы сопряжённым числам чисел: $a)\ z_3 - z_2;$ $\qquad$ $б)\ z_1 + z_3;$

Решение. а) Найдём $z_3 - z_2 = (-4+7i) - (3+2i) = -4+7i-3-2i = -7+5i;$

сопряжённое число: $-7-5i;$

$$r = \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}. \qquad arg\,\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-5}{-7} = arctg\,\frac{5}{7}$$

;

$$-7-5i = \sqrt{74}\ (cos\,(arctg\,\frac{5}{7}) + i\, sin\,(arctg\,\frac{5}{7})).$$

б) Найдём $z_1+z_3=(-3+5i)+(-4+7i)$ = -3 + 5i - 4+7i = -7+12i ;

сопряжённое число: -7 - 12i;

$r=\sqrt{(-7)^2+(-12)^2}=\sqrt{49+144}=\sqrt{193}$. $\quad arg\,\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{-12}{-7} = arctg\,\frac{12}{7}$;

-7 - 5i $=\sqrt{193}$ (*cos* (*arctg* $\frac{12}{7}$) + *i sin* (*arctg* $\frac{12}{7}$)).

Ответ. а) $r=\sqrt{74}$, $\sqrt{74}$ (*cos* (*arctg* $\frac{5}{7}$) + *i sin* (*arctg* $\frac{5}{7}$)).

б) $r=\sqrt{193}$, $\sqrt{193}$ (*cos* (*arctg* $\frac{12}{7}$) + *i sin* (*arctg* $\frac{12}{7}$))

Пример 7. Комплексные числа $z_1=1-i,\ \ z_2=-\sqrt{3}+i$.представить в тригонометрической форме и найти: *а*) z_1z_2; *б*) $\frac{z_1}{z_2}$; *в*) $z_1^{\ 28}$; *г*) $\sqrt[3]{z_2}$; *д*) $\overline{z_1z_2}$; *е*) $\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)$.

Решение. По формуле (10) найдём модуль комплексного числа z_1:

$r_1=|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, а из соотношений (.9) $cos\,\varphi_1=\frac{x_1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad sin\,\varphi_1=\frac{y_1}{r_1}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

получим аргумент числа z_1 (берём его главное значение):

$\varphi_1 = arg\,z_1 = -\frac{\pi}{4}$, т.е. $z_1=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$.

Аналогично, $r_2=|z_2|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$, $\quad cos\,\varphi_2=\frac{x_2}{r_2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad sin\,\varphi_2=\frac{y_2}{r_2}=\frac{1}{2}$.

Т.е. $\varphi_2 = arg\,z_2=\frac{5\pi}{4}$, и $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Теперь по формулам (13), (13'), (14) (формула Муавра) и (18) найдём

а) $z_1z_2=\sqrt{2}\cdot 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6})\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$;

б) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6})\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{6}-i\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)==\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-i)$.

в) $z_1^{\ 28}=(1-i)^{28}=\left(\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\right)^{28}=(\sqrt{2})^{28}\left(\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\right)^{28}=$

$= 2^{14}(\cos\frac{28\cdot\pi}{4}-i\sin\frac{28\pi}{4})$ = 16384 (cos7π – sin7π) = 16384 (-1+0π) = -16384.

г) $\sqrt[3]{\overline{z_2}} = \sqrt[3]{(-\sqrt{3}+i)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3} \right)$;

$k = 0, 1, 2.$ При $k = 0$ $\sqrt[3]{\overline{z_2}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}}{3} \right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{18} + i\sin\dfrac{5\pi}{18} \right).$

При $k = 1$ $\sqrt[3]{\overline{z_2}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{18} + i\sin\dfrac{17\pi}{18} \right).$

При $k = 2$ $\sqrt[3]{\overline{z_2}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{6}+4\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{6}+4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{29\pi}{18} + i\sin\dfrac{29\pi}{18} \right).$

д) $\overline{z_1 z_2}$; Имеем $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12} \right)$; Тогда $\overline{z_1 z_2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} - i\sin\dfrac{7\pi}{12} \right)$;

е) $\left(\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} \right)$. Зная что $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-i).$ найдём $\left(\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} \right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+i).$

Пример 8. Комплексные числа а) $z_1 = -1+i$; б) $z_2 = 1+\sqrt{3}i$;

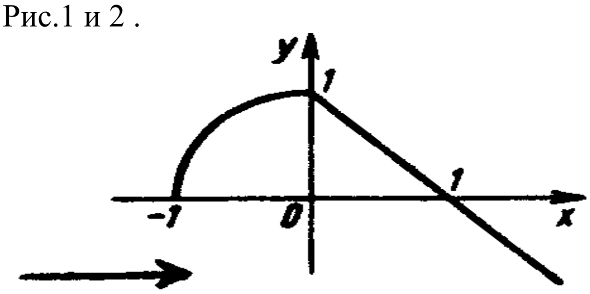
Решение. а) $z_1 = -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

б) $z_2 = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} \right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Пример 9. Изобразить на комплексной плоскости числа: 1) $z_1 = -8$, 2) $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} \right)$. Записать число z_1 в тригонометрической, а число z_2 - в алгебраической форме.

Решение. 1) Для числа z_1 имеем $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = -8, y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 0$. Откладывая по оси Ox $x_1 = -8$, а по оси Oy $y_1 = 0$, получаем точку комплексной плоскости, соответствующую числу z_1(рис.2). Модуль этого числа находим по формуле (7):

Рис.1 и 2 .



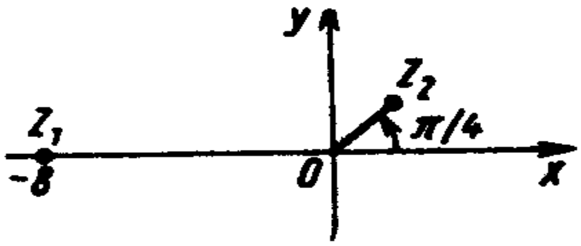


Рис. 1. Рис. 2

$p_1=|z_1|=\sqrt{(-8)^2+0^2}=8.$ Аргумент определяем из равенства $tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{0}{(-8)}=0.$ Так как число z_1 находится в левой полуплоскости, то его аргумент $\varphi_1=\pi.$ Тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид $z_1=8(\cos\pi+i\sin\pi).$

2) Модуль числа z_2 равен p_2, а аргумент $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$. Для его изображения на комплексной плоскости проводим из полюса луч под углом $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$ к полярной оси и откладываем на нем отрезок, длиной $p_2=2.$ Полученная точка соответствует числу z_2 (рис.8).

Его действительная часть $\operatorname{Re} z_2=x_2=p_2\cos\varphi_2=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, а минимальная часть $\operatorname{Im} z_2=y_2=p_2\sin\varphi_2=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$ Таким образом, алгебраическая форма числа z_2 имеет вид $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2i}.$

Пример 10: Вычислить $\sqrt[3]{-8}$

Решение. Модуль числа -8 равен 8, а аргумент равен π. Используя формулу (8), получаем

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right);\quad k=0,1,2.$$

$$\text{\textit{При}}\quad k=0:\quad \sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right)=$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}.$$

$$\text{\textit{При}}\quad k=1:\quad \sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=$$
$$=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$$

$$\text{\textit{При}}\quad k=2:\quad \sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=$$
$$=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Пример 11.Решить уравнение $5z^3-17z^2+21z-9=0$ и изобразить его корни z_1,z_2,z_3 на комплексной плоскости.

Проверить, что

$a)\ z_1+z_2+z_3=3{,}4,\quad б)\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=4{,}2,\quad в)\ z_1z_2z_3=1{,}8\ ,\quad$ г) $(z_1-z_2)^{23}$.

<u>Решение.</u> 1) Подбором находим корень уравнения $5z^3-17z^2+21z-9=0$

$z_1=1$.

(Его легко найти из делителей свободного члена 9: $\pm 1; \pm 3; \pm 9$).
Используя схему Горнера или способ деления многочлена $(5z^3-17z^2+21z-9)$ на двучлен $(z\text{-}1)$ (Вспомните разложение многочлена : $(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)\ldots(x\text{-}x_n)$) получим:

$$(z\text{-}1)(5z^2-12z+9)=0,$$

Решив квадратное уравнение $5z^2-12z+9=0$ будем иметь мнимые корни, выраженные комплексными числами: $z_{2,3}=\frac{6}{5}\pm\sqrt{\frac{36}{25}-9}=\frac{6}{5}\pm\sqrt{\frac{36}{25}-\frac{45}{25}}=\frac{6}{5}\pm\sqrt{-\frac{9}{25}}=\frac{6}{5}\pm\frac{3}{5}i$.

СХЕМА ГОРНЕРА	ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ДВУЧЛЕН

	5	-17	21	-9
		5	-12	9
1	5	-12	9	0

$(z\text{-}1)\cdot(5z^2-12z+9)=0$

$$\begin{array}{r|l} -\ 5z^3-17z^2+21z-9 & z-1 \\ \underline{5z^3-5z^2\qquad\qquad\quad} & \overline{5z^2-12z+9} \\ -\ -12z^2+21z\quad & \\ \underline{-12z^2+12z\quad} & \\ -\ 9z-9 & \\ \underline{9z-9} & \\ 0 & \end{array}$$

2) Проверим равенства а), б), в):

а) $a)\ z_1+z_2+z_3=1+(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i)+(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i)=1+\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i+\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i=1{,}4;$

$б)\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=1\cdot(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i)+1\cdot(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i)+(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i)\cdot(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i)=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i+\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i+$
$\frac{36}{25}-\frac{9}{25}i^2=$

$=\frac{12}{5}+\frac{36}{25}+\frac{9}{25}=\frac{60+45}{25}=\frac{105}{25}=4{,}2;$

$в)\ z_1z_2z_3=1\cdot(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i)\cdot(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i)=\frac{36}{25}+\frac{9}{25}=\frac{45}{25}=1{,}8.$

г) По формуле Муавра найдём $(z_2-z_3)^{23}=(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i-(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i))^{23}=(-\frac{6}{5}i)^{23}=$

$=(\frac{6}{5})^{23}(\cos\frac{23\pi}{2}+i\,sin\frac{23\pi}{2}).$

Тренировочные упражнения

2.1.На комплексной плоскости постройте точки:

$а)\ z=2+2i;\qquad б)\ z=-1+i;$

$в)\ z=i;\qquad г)\ z=-i;$

$д)\ z=1-i;\qquad е)\ z=-4i.$

22. Найдите комплексно-сопряженные числа для следующих чисел и постройте их на комплексной плоскости:

$а)\ z=3-2i;\qquad б)\ z=-2-i;$

в) $z = 5i$; *г)* $z = i$;

д) $z = 6$.

2.3. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2 + x + 1 = 0$; *б)* $x^2 - x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 1 = 0$; *г)* $2x^2 + 3 = 0$.

2.4. Даны числа $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 1 - 2i$. Найдите числа:

а) $z_1 + z_2$; *б)* $z_1 - z_2$;

в) $z_1 * z_2$; *г)* $\frac{z_1}{z_2}$.

2.5. Докажите, что если $\frac{(z_1 + z_2)z_3}{z_4} = a + bi$, то $\frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\bar{z}_3}{\bar{z}_4} = a - bi$.

2.6. Дано: $z = 2 + i$. Найдите z^n, если $n = 2, 3, 4$.

2.7. Найдите *x и y* из уравнения $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i,\ x, y \in \boldsymbol{R}$.

2.8. Вычислите:

а) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; *б)* $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^4$

2.9. Найдите комплексные числа, сопряженные своему квадрату.

2.10. Проверьте тождество

$x^4 + 4 = (x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x + 1 + i) \cdot (x + 1 - i)$.

2.11. Постройте точки, изображающие комплексные числа 1; -1; $\sqrt{2}$; i; $-i$; $i\sqrt{2}$; $-1 + i$; $2 + 3i$.

2.12. Представьте в тригонометрической форме следующие комплексные числа: 1; -1; i; $-i$; $1 + i$; $-1 + i$; $-1 - i\sqrt{3}$; $2i$; $2 + \sqrt{3} + i$.

2.13. Дано $z_1 = 3 + 4i, z_2 = -3 + 2i, z_3 = 4 - 3i$. Вычислите, чему равны модули и аргументы чисел: *а)* $z_1 + z_2$; *б)* $z_2 + z_3$;

в) $z_1 + z_3$; *г)* $z_1 - z_2$;

д) $z_2 - z_3$; *е)* $z_3 - z_1$;

2.14. Даны числа $z_1 = 2(\cos 30^0 + i \sin 30^0)$ и $z_2 = 3(\cos 60^0 + i \sin 60^0)$.

Составьте сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$. Найдите их модули и аргументы.

2.15. Найдите множество точек, изображающих комплексные числа:

а) модуль которых равен 1;

б) аргумент которых равен $\frac{\pi}{6}$

2.16. Найдите множества точек плоскости, изображающих комплексные числа z, удовлетворяющие неравенствам:

а) $|z| < 1$; *б)* $|z| \le 1$;

в) $|z| > 1$; *г)* $|z| \ge 2$.

2.17. Дано $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right),\ z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Найдите: *а)* $z_1 z_2$; *б)* $\frac{z_1}{z_2}$; *в)* $z_1^{\ 3}$; *г)* $\sqrt{z_1}$; *д)* $\overline{z_1 z_2}$; *е)* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

2.18. Докажите, что $(1+i\sqrt{3})\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

2.19. Упростите $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}$.

2.20. Вычислите: $(1+i)^6$.

2.21. Извлеките корни: *а)* $\sqrt[3]{i}$; *б)* $\sqrt[3]{2-2i}$; *в)* $\sqrt[4]{-4}$; *г)* $\sqrt[6]{1}$.

2.22. Выразить через *cos x* и *sin x*: *а) cos 5x*; *б) sin 6x*; *в) tg 3x.*

2.23. Представьте в экспоненциальной форме комплексные числа:

а) $2+2i$; *б)* $1+\sqrt{3}i$;

в) $-1-\sqrt{3}i$.

2.24. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

а) $z=5e^{1,5i}$; *б)* $z=2e^{0,5i}$;

в) $z=3e^{-i}$.

2.25. Дано $z_1=2e^{-i}$; $z_2=\frac{1}{2}e^{0,5i}$. Найдите

а) $\bar{z}_1$; *б)* z_1z_2; *в)* $\frac{z_1}{z_2}$;

г) $z_1\bar{z}_2$; *д)* $\bar{z}_1z_2$; *е)* $z_1^{\,3}$.

2.26. Выполните действия над комплексными **числами:**

а) $\left(2\frac{3}{4}+3\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}i\right)$; *б)* $1,(3)+0,2(6)i-(-2,1(3)+0,6(2)i)$;

в) $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i\right)-(\sqrt{27}-i\sqrt{32})+(2\sqrt{3}-4i\sqrt{2})$; *г)* $(4+3i)\cdot 0,(4)$.

2.27. Найдите действительные числа a и b, такие, чтобы выполнялись равенства:

а) $\frac{2i}{a}-bi+4=3i-\frac{7}{a}+2b$; *б)* $(1+i)a+(1-i)b=3-i$;

в) $(2+3i)a+(2-3i)(a+b)=7-8i$.

2.28. Вычислите:

а) $(-3,2i)(-4,5i)$; *б)* $(1-i)(1+i)$;

в) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)$; *г)* $(\sqrt{3}+\sqrt{6}i)(1-\sqrt{3}i)$;

д) $(2+5i)^2(3-i)$; *е)* $(3+i)^3$;

ж) $(1-2i)^2\cdot(1+2i)^2$.

2.29. Найдите действительные числа x и *y,* такие, что $(2x-3yi)(2x+3yi)+xi=97+2i$.

2.30. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2-2x+2=0$; *б)* $x^2+10x+50=0$;

в) $9x^2-12x+7=0$; *г)* $x^2+3=0$.

2.31. Вычислите:

а) $\frac{3+2i}{7-2i}$; *б)* $\left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^3$;

в) $\dfrac{3+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{3+i}$; *г)* $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}$;

д) $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+ai}$; *е)* $i+i^2+i^3+i^4$;

ж) $\dfrac{3+i}{3-i}:\dfrac{2}{5(1-i)}$.

2.32. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $5+xyi$ и $x+y+4i$ будут комплексно-сопряженными?

2.33. Разложите на множители выражения:

а) $4a^2+9b^2$; *б)* $x^2+4x+13$;

в) m^2+n^2; *г)* $y^2-6y+25$;

2.34. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $\sqrt{3}+i$; *б)* $1-i\sqrt{3}$;

в) $6+6i$; *г)* $3+4i$.

2.35. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

а) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; *б)* $8\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.